

Allgemeine Relativitätstheorie

Sommersemester 2007

Blatt 2

Besprechung:

am 30.04., 16:15 im neuen Hörsaal, Philosophenweg 12 und

am 02.05., 11:15 im großen Hörsaal, Philosophenweg 12

1. Zeitdilatation

Die Ortsbestimmung im GPS-System benutzt die Laufzeiten von Signalen der Satelliten. Diese haben dazu sehr genaue Atomuhren an Bord. Die Satelliten bewegen sich auf kreisförmigen Bahnen in einer Höhe von 20200 km über der Erdoberfläche. Wie groß ist die resultierende Zeitdilatation? Welchen Fehler in der Ortsbestimmung bedeutet dies (pro Tag)? (Die Zeitdilatation hängt nur vom Betrag der Geschwindigkeit ab.)

2. Die Wirkung eines relativistischen Punktteilchens mit einer durch λ parametrisierten Weltlinie $\gamma : \lambda \mapsto x^\mu(\lambda)$ ist

$$S = -m \int d\lambda \sqrt{-\dot{x}^\mu \dot{x}_\mu}.$$

- (a) Zeige, daß dieser Ausdruck unter einer Reparametrisierung $\lambda \rightarrow \lambda'(\lambda)$ invariant ist. Die Funktion $\lambda'(\lambda)$ erfülle $d\lambda'/d\lambda > 0$ für alle λ .
- (b) Ermittle die aus dieser Wirkung folgenden Bewegungsgleichung.
- (c) Zeige, wie sich die Wirkung im Falle einer Parametrisierung, welche λ mit der Eigenzeit τ identifiziert, vereinfacht.

3. Karten und Mannigfaltigkeiten

- (a) Eine Mannigfaltigkeit M sei durch zwei Karten $\phi_i : O_j \rightarrow U_j$, $U_j =]0, 1[\subset \mathbb{R}$, $O_j \subset M$, und deren Kartenwechsel gegeben:

- $x_1 = \frac{3}{4} + x_2$ für $x_1 \in]\frac{3}{4}, 1[$ und $x_2 \in]0, \frac{1}{4}[$
- $x_2 = \frac{3}{4} + x_1$ für $x_2 \in]\frac{3}{4}, 1[$ und $x_1 \in]0, \frac{1}{4}[$

Kartenwechsel sind Abbildungen $\phi_{12} \equiv \phi_2 \circ \phi_1^{-1} : U_1|_{\phi_1(O_1 \cap O_2)} \rightarrow U_2|_{\phi_2(O_1 \cap O_2)}$. Um was für eine Mannigfaltigkeit handelt es sich? Beschreibe diese als Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^2 .

- (b) Wie viele Karten benötigt man mindestens, um die 2-Sphäre S^2 zu überdecken? Gebe analog zu Teil (a) die Übergangsfunktionen für einen Atlas aus Karten $\phi_j : O_j \rightarrow \mathbb{C}$, $O_j \subset S^2$ an. (Hinweis: Stelle Dir die S^2 als $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ vor.)