Allgemeine Relativitätstheorie

Sommersemester 2007

Blatt 3

Besprechung:

am 07.05., 16:15 im neuen Hörsaal, Philosophenweg 12 und
am 09.05., 11:15 im großen Hörsaal, Philosophenweg 12

1. Die Minkowskimetrik in kartesischen Koordinaten ist $\eta = \mathrm{diag}(-1, 1, 1, 1)$. Welche Form hat sie in Kugelkoordinaten?

   Der Koordinatenwechsel $(t, x, y, z) \to (t', r, \theta, \phi)$ ist gegeben durch

   $$t' = t\,, \qquad x = r \sin\theta \cos\phi\,, \qquad y = r \sin\theta \sin\phi\,, \qquad z = r\cos\theta\,,$$

   die Winkelbereiche sind $\theta \in \,]0, \pi[$ und $\phi \in \,]0, 2\pi[$.

2. (a) Die Bedingung, daß die Metrik nicht ausgeartet ist, bedeutet, daß die Matrix $g_{\mu\nu}(x)$ an jedem Punkt x invertierbar ist. Formuliere diese Bedingung in einer koordinatenunabhängigen Weise (mit Begründung)!

   (b) Zeige, daß eine beliebige Metrik an einem Punkt p durch Koordinatenwechsel immer in die Form

   $$g_{\mu\nu}(p) = \mathrm{diag}\big(\underbrace{-1, \ldots, -1}_{t}, \underbrace{1, \ldots, 1}_{s}\big)$$

   gebracht werden kann. Hier ist $t + s = d$ die Dimension der Mannigfaltigkeit. Kann man die Signatur $s - t$ durch Koordinatentransformationen ändern?

3. Zeige, daß die partielle Ableitung einer 1-Form $\partial_\mu v_\nu$ sich unter Koordinatentransformationen nicht wie ein Tensor transformiert. Wie müssen sich die Christoffelsymbole $\Gamma^\rho_{\mu\nu}$ transformieren, damit sich die kovariante Ableitung $D_\mu v_\nu = \partial_\mu v_\nu - \Gamma^\rho_{\mu\nu} v_\rho$ wie ein Tensor transformiert? (Die Transformation von $\Gamma^\rho_{\mu\nu}$ enthält einen Anteil, der der Transformation eines Tensors entspricht sowie einen Zusatzterm.)

4. Die Kugeloberfläche sei mit den Koordinaten $\theta \in \,]0, \pi[$ und $\phi \in \,]0, 2\pi[$ durch die Metrik

   $$\mathrm{d}s^2 = g_{ij}\,\mathrm{d}x^i \mathrm{d}x^j = \mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\,\mathrm{d}\phi^2$$

   beschrieben.

   (a) Berechne alle Christoffelsymbole Γ^i_{jk} und zeige, daß die Kurven mit $\phi = \text{const.}$ und der Äquator $\theta = \frac{\pi}{2}$ Geodäten sind.

   (b) Betrachte für ein gegebenes $\theta = \text{const.}$ die Parallelverschiebung des Vektors $v^\mu(\theta, \phi = 0) = (0, 1)$ entlang des Kreises $\phi = 0 \ldots 2\pi$. Was ergibt sich für die Differenz

   $$v^\mu(\theta, \phi = 2\pi) - v^\mu(\theta, 0)\,?$$