Allgemeine Relativitätstheorie

Sommersemester 2007

Blatt 4

Besprechung:

am 14.05., 16:15 im neuen Hörsaal, Philosophenweg 12 und

am 16.05., 11:15 im großen Hörsaal, Philosophenweg 12

1. In der Vorlesung wurde gezeigt, daß sich die Wirkung eines Teilchens im Gravitationsfeld als
$$S = \frac{1}{2} \int d\tau \left(\eta^{-1} \dot{x}^2 - \eta m^2 \right)$$
schreiben lässt. Hierzu wurde eine unabhängige Metrik $ds^2 = \gamma_{\tau\tau} d\tau^2$ auf der Bahnkurve einführt. Es ist $\eta = \sqrt{-\gamma_{\tau\tau}}$.
   - Zeige daß diese Wirkung unter einer Reparametrisierung $\tau \to \tau'(\tau)$ invariant ist.
   - Setze $m = 0$ und ermittle durch Variation der Wirkung die Bewegungsgleichung eines masselosen Teilchens im Gravitationsfeld.

2. Der Krümmungstensor
   - Benutze die auf dem letzten Blatt (Aufgabe 4) berechneten Christoffelsymbole um den Krümmungstensor einer zweidimensionalen Sphäre zu berechnen.
   - Welche Krümmung ergibt sich (ohne zu rechnen) aus der Metrik
$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin\theta^2 d\phi^2 \quad ?$$

3. Betrachte zwei Vektoren $\alpha^\mu, \delta^\mu \in T_pM$ und infinitesimale Translationen in deren Richtungen: $x^\mu \to x^\mu + \epsilon\alpha^\mu$ und $x^\mu \to x^\mu + \epsilon\delta^\mu$. Um zwei sukzessive Translationen ausführen zu können, muß der zur zweiten Translation gehörende Vektor entlang der ersten Translation parallel transportiert werden. Welcher Bedingung muß der Zusammenhang genügen, damit die Reihenfolge ohne Bedeutung für das Ergebniss ist?

4. Berechne den Paralleltransport eines Vektoren entlang einer infinitesimal kleinen Schleife. Es empfiehlt sich die Schleife entlang zweier Koordinatenachsen zu wählen, so daß der Weg in vier Teile zerlegt ist. Wir bezeichnen die beiden Richtungen mit x^1 und x^2. Entlang eines Weges in Richtung x^1 gilt
$$\frac{dv^\mu}{dx^1} = -\Gamma^\mu_{1\rho} v^\rho.$$
Die Differenz Δv^μ zwischen dem ursprünglichen und dem um die Schleife transportierten Vektor lässt sich nun als Summe von vier Integralen schreiben. Im Limes einer infinitesimal kleinen Schleife entwickle man zwei der Integranden so, daß sich die Integrale paarweise zusammenfassen lassen. Des weiteren kann man die Integrale als Produkt aus

Integrand und Länge des Integrationsweges nähern. Benutzt man nun für die auftretenden Ableitungen von v^μ noch einmal die Gleichung für den Paralleltransport, erhält man Δv^ν als

$$\Delta v^\nu = \delta_1 \delta_2 R_{12\mu}{}^\nu v^\mu.$$

Hier bezeichnen δ_1 und δ_2 die Ausdehnung der Schleife in x^1 und x^2 Richtung. Es wird also in gekrümmten Mannigfaltigkeiten ein Vektor durch Paralleltransport um eine Schleife linear auf einen anderen Vektoren abgebildet. Die geometrische Bedeutung des Krümmungstensoren ist es, diese Abbildung zu generieren. Betrachtet man nun die Menge aller Abbildungen welche von Schleifen induziert werden, gelangt man zur sogenannten Holonomiegruppe.