Allgemeine Relativitätstheorie

Sommersemester 2007

Blatt 5

Besprechung:

am 21.05., 16:15 im großen Hörsaal, Philosophenweg 12 und

am 24.05., 11:15 im großen Hörsaal, Philosophenweg 12

1. Beweise die 'zweite Bianchi Identität':

$$D_{[\mu} R_{\nu\rho]\sigma}{}^{\tau} = 0.$$

   Mittels der Definition des Krümmungstensors als Kommutator leite man zuerst die Gleichung

$$(D_\mu R_{\nu\rho\sigma}{}^{\delta}) v_\delta = [D_\mu, [D_\nu, D_\rho]]\, v_\sigma + R_{\nu\rho\mu}{}^{\tau} D_\tau v_\sigma$$

   ab. Danach benutze man die Jacobi Identität:

$$[[A,B], C] + [[C,A], B] + [[B,C], A] = 0,$$

   (A, B, C seien Matrizen oder Differentialoperatoren) sowie die Symmetrien des Krümmungstensors um das gewünschte Ergebnis zu erhalten. Wenn Dir die Jacobi Identität neu ist, so überzeuge Dich von ihrer Gültigkeit.

2. Folgere aus der in Aufgabe 1 gezeigten Bianchi Identität, daß der Einstein Tensor kovariant konstant ist:

$$D_\mu \left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g^{\mu\nu} \right) = 0.$$

3. Zeige daß der Ausdruck

$$\int d^4x \sqrt{-g} D_\mu v^\mu$$

   für ein beliebiges Vektorfeld v^μ einen Randterm darstellt. Als Zwischenschritt mache man sich klar, daß

$$D_\mu v^\mu = \partial_\mu v^\mu + \frac{1}{\sqrt{-g}} v^\mu \partial_\mu \sqrt{-g}$$

   gilt.