Allgemeine Relativitätstheorie

Sommersemester 2007

Blatt 7

Besprechung:

am 04.06. um 16:15 Uhr und am 06.06. um 11:15 im großen Hörsaal, Philosophenweg 12

1. Für die Kosmologie ist es sinnvoll, die Zustandsgleichung in der Form $p = w\rho$ zu schreiben. Dabei ist p der Druck und ρ die Energiedichte des Fluidums, und w ist ein kosntanter Parameter.

   (a) Bestimme w für ein ideales Gas mit der Zustandsgleichung $pV = NkT$. Betrachte dazu die beiden Grenzfälle von Staub (d.h. nichtrelativistische Teilchen mit der Energie $E \approx m + \frac{3}{2}kT$, $kT \ll m$) und eines hochrelativistischen Gasen ($E \approx 3kT + m^2/(kT)^2$, $kT \gg m$).

   (b) Bestimme w für ein Photonengas, d.h. für ein elektromagnetisches Feld. Berechne dazu den Energie-Impuls-Tensor auf der Wirkung $S_{\mathrm{em}} = -\frac{1}{4}\int \mathrm{d}^4x\, F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$. Für eine homogene und isotrope Feldkonfiguration musss der Energie-Impuls-Tensor dem einer idealen Flüssigkeit entsprechen. Berechne die Spur des Energie-Impuls-Tensors, um w zu finden.

   (c) Betrachte den Energie-Impuls-Tensor eines homogenen skalaren Feldes ϕ und drücke p und ρ durch kinetische und potentielle Energie aus ($E_{\mathrm{kin}} \sim \dot{\phi}^2$, $E_{\mathrm{pot}} \sim V(\phi)$)

2. In der Vorlesung wurden die Metriken für die maximal symmetrischen dreidimensionalen Räume gegeben durch

$$\mathrm{d}s_3^2 = \gamma_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j = \left\{ \begin{array}{cl} \mathrm{d}\psi^2 + \sin^2\psi \mathrm{d}\,\Omega_2^2 & \text{sphärisch } (\kappa > 0) \\ \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2 & \text{flach } (\kappa = 0) \\ \mathrm{d}\psi^2 + \sinh^2\psi\,\mathrm{d}\Omega_2^2 & \text{hyperbolisch } (\kappa < 0) \end{array} \right. ,$$

   mit $\mathrm{d}\Omega_2^2 = \mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta \mathrm{d}\phi^2$. Die Indizes $i, j, \ldots$ laufen von 1 bis 3.

   (a) Zeige, daß diese drei Geometrien durch die Metrik

$$\mathrm{d}s_3^2 = \frac{\mathrm{d}r^2}{1 - kr^2} + r^2\mathrm{d}\Omega_2^2\,, \quad k \in \{-1, 0, 1\}$$

   beschrieben werden können.

(b) Die Metrik der gesamten Raumzeit ist dann

$$\mathrm{d}s^2 = g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu\mathrm{d}x^\nu = -\mathrm{d}t^2 + a^2(t)\,\mathrm{d}s_3^2\,,$$

wobei $a(t)$ der Skalenfaktor ist. Zeige, daß sich $a(t)$ und der Betrag von k durch Transformationen der r-Koordinate ändern lassen.

Berechne den Einstein-Tensor für diese Metrik und verifiziere so die Friedmann-Gleichungen.

Hinweis: Nutze aus, daß die räumlichen Schnitte maximale Symmetrie haben, so daß $R^{(3)}_{ij}(\gamma) = 2\kappa\gamma_{jk}$. Um die Krümmung der vollen Raumzeit zu berechnen, setze die Christoffelsymbole $\Gamma^\rho_{\mu\nu}(g)$ in Beziehung zu den dreidimensionalen Christoffelsymbolen $\widetilde{\Gamma}^k_{ij}(\gamma)$, der Metrik γ_{ij} sowie dem Skalenfaktor $a(t)$ und seiner Ableitung $\dot{a}(t)$. Damit kannst du die räumlichen Komponenten des Ricci-Tensors als Summe $R^{(4)}_{ij}(g) = R^{(3)}_{ij}(\gamma) + (\text{Zusatzterm})_{ij}$ schreiben. Die anderen Komponenten $R^{(4)}_{00}$ und $R^{(4)}_{0i}$ kannst du durch $a(t)$ und Ableitungen davon ausdrücken.