

Allgemeine Relativitätstheorie

Sommersemester 2007

Blatt 8

Besprechung:

am 11.06. um 16:15 Uhr und am 13.06. um 11:15 im großen Hörsaal,
Philosophenweg 12

1. Als Einstein die ART aufgestellt hatte, suchte er eine kosmologische Lösung. Dabei glaubte er, daß das Universum statisch sei. Dazu benötigte er neben der „normalen“ Materie (Staub und Strahlung) eine kosmologische Konstante (oder Vakuumenergie), d.h. $\rho = \rho_M + \Lambda$ und $p = p_M - \Lambda$, mit $\rho_M > 0$ und $p_M = w\rho_M$ mit konstantem Parameter w , $0 \leq w \leq \frac{1}{3}$.

(a) Finde eine statische Lösung der Friedmann-Gleichungen, d.h. $a(t) = a_0 = \text{const.}$

(b) Ist diese Lösung stabil unter kleinen Störungen $\rho_M \rightarrow \rho_M + \delta\rho$?

2. Differentialformen

(a) Betrachte den dreidimensionalen euklidischen Raum sowie eine skalare Funktion $\phi(x)$ und ein Vektorfeld $\vec{u}(x)$. Drücke $\text{grad } \phi$, $\text{div } \vec{u}$, $\text{rot } \vec{u}$, $\Delta\phi$ und $\Delta\vec{u}$ durch Differentialformen aus und beweise die Identitäten

i. $\text{rot grad } \phi = 0$

ii. $\text{div rot } \vec{u} = 0$

iii. $\text{rot rot } \vec{u} = \text{grad div } \vec{u} - \Delta\vec{u}$

iv. Sei weiter \vec{v} ein weiteres Vektorfeld. Drücke $\vec{u} \times \vec{v}$ durch Differentialformen aus.

(b) Betrachte den Stokes'schen Satz

$$\int_V d\omega = \int_{\partial V} \omega,$$

wobei ω eine d -Form und V ein $d + 1$ -dimensionales Gebiet ist. Was bedeutet der Satz für $d = 0, 1, 2$?

(c) Sei V die Volumenform und A und B zwei p -Formen. Zeige, daß $V = *1$ und daß $A \wedge *B = B \wedge *A$.

3. Betrachte in Analogie zur Elektrodynamik die Theorie eines freien 2-Form-Feldes B_2 . Die Wirkung sei

$$S = \int \frac{1}{24} dB \wedge *dB$$

- (a) Was ist die Eichinvarianz dieser Theorie?
(b) Zeige, daß diese Theorie dual ist zu einer eines freien skalaren Feldes ϕ mit Wirkung

$$S = \int \frac{1}{8} d\phi \wedge *d\phi$$