

Allgemeine Relativitätstheorie

Sommersemester 2007

Blatt 9

Besprechung:

am 18.06. um 16:15 Uhr und am 20.06. um 11:15 im großen Hörsaal,
Philosophenweg 12

1. Zeige auf zwei Weisen, daß der Spinzusammenhang $\omega_a{}^b$ antisymmetrisch ist (mit zwei unteren Indizes, d.h. $\omega_{ab} = \omega_a{}^c \eta_{cb} = -\omega_{ba}$):

(a) Folgere die Antisymmetrie aus der Metrikkompatibilität der kovarianten Ableitung, $Dg_{\mu\nu} = 0$, die ja auch in der Vielbeinformulierung gelten muß. Drücke dazu $g_{\mu\nu}$ durch η_{ab} und Vielbeine aus und benutze die Torsionsfreiheit.

(b) Die Antisymmetrie folgt auch daraus, daß der Spinzusammenhang Werte in der Liealgebra $\mathfrak{Lie}(SO(1,3))$ annimmt. Zeige also, daß alle Elemente $\Sigma \in \mathfrak{Lie}(SO(1,3))$ antisymmetrisch sind. Benutze dazu, daß jedes Element Λ der $SO(1,3)$ geschrieben werden kann als

$$\Lambda_a{}^b = (e^{t\Sigma})_a{}^b$$

und die definierende Relation

$$\Lambda_a{}^c \eta_{cd} \Lambda_b{}^d = \eta_{ab} \quad (*)$$

erfüllt. Entwickle dazu $(e^{t\Sigma})_a{}^b = \delta_a^b + t \Sigma_a{}^b$ und setze in (*) ein. Beachte dabei die jeweilige Indexstellung!

2. Betrachte die 2-Sphäre in den üblichen (θ, ϕ) -Koordinaten.

(a) Bestimme das Vielbein e_μ^a ($\mu = \theta, \phi$; $a = 1, 2$).

(b) Lese den Spinzusammenhang $\omega_{\mu a}{}^b$ aus der Torsionsfreiheitsbedingung $-T^a = De^a = 0$ ab.

(c) Berechne den Krümmungstensor sowie Ricci-Tensor und -Skalar und zeige, daß man die bekannten Ergebnisse von Blatt 4 reproduzieren kann.

3. (a) Bestimme die allgemeine Form des Spinzusammenhangs als Funktion des Vielbeins aus der Antisymmetrie (siehe Aufgabe 1) und Torsionsfreiheit!

Hinweis: Schreibe dazu die Torsionsgleichung $De^a = 0$ in Komponenten aus (es handelt sich um Matrixwertige 2-Formen). Die Gleichung enthält Ableitungen des Vielbeins sowie Kontraktionen des Vielbeins mit dem Zusammenhang. Multipliziere mit dem inversen Vielbein, um diese Kontraktionen aufzulösen und kombiniere dann die Gleichung in geeigneter Indexkombination, um den Spinzusammenhang durch das Vielbein, sein Inverses und Ableitungen davon auszudrücken.

(b) Bestimme das Transformationsverhalten des Krümmungstensors $R = d\omega + \omega \wedge \omega$ unter lokalen Lorentztransformationen.