(Klassische) Theoretische Mechanik

→ www.thphys.uni-heidelberg.de/~hebecker

Vorbemerkungen

- "klassisch" heißt hier: – ohne spezielle Relativitätsth.
  – ohne Quantenmechanik *)

*) Mechanik der Kontinua ist eingeschlossen, wird aber aus Zeitgründen nur kurz behandelt

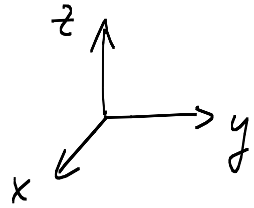
- Die grundlegende Bedeutung der Mechanik für die theor. Physik erklärt sich aus folgendem:
  - Mechanik hat die theor. Physik <u>definiert</u>, bevor es Thermodynamik, E-Dynamik, Quantenmechanik etc. gab.
  - Das <u>Symmetrieprinzip</u> und die <u>Erhaltungssätze</u> finden sich in einfachster Form in der Mechanik und prägen die gesamte Physik
  - Viele <u>math. Methoden</u> der theor. Physik finden sich in klarster Form in der Mechanik (Diff.-gl., Diff.geom., Variationsrechnung, elementare Gruppentheorie)
  - Die <u>Lagrange</u>- u. <u>Hamilton</u>-Formulierung der Mechanik führen unmittelbar zur

    <u>Pfadintegral</u>- u. <u>Operatorformulierung</u> der Quantenmechanik, die auch die modernsten Forschungsgebiete (Quantenfeldtheorie, Stringtheorie) beherrschen.
- Die Theoret. Physik lebt, ungeachtet aller Axiomatik, von Beispielen. (⇒ Übungen wichtiger als Vorlesung!).

1 Grundbegriffe der Newtonschen Mechanik

1.1 Kinematische Grundbegriffe

Raum: (zunächst) 3-dimensional ;
wähle Koordinatensystem zur Beschreibung:



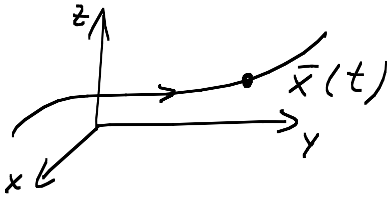
; Punkt charakterisiert durch Vektor

$$\vec{x} = \bar{x} = (x^1, x^2, x^3) = (x, y, z)$$

d.h. $\bar{x} \in \mathbb{R}^3$ (3-dim. reeller Vektorraum)
zentraler Begriff!

Zeit: $t \in \mathbb{R}$ (Man denke an synchronisierte Uhren an allen Raumpunkten.)

Trajektorie (eines Punktes): $\bar{x} = \bar{x}(t)$ (Abb. $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $t \mapsto \bar{x}(t)$)



Geschwindigkeit: $\bar{v} = \dot{\bar{x}} = \dot{\bar{x}}(t) = \dfrac{d\bar{x}(t)}{dt} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta \bar{x}}{\Delta t}$

$$\dot{\bar{x}} = (\dot{x}^1, \dot{x}^2, \dot{x}^3)$$

Beschleunigung: $\bar{a} = \ddot{\bar{x}} = \dfrac{d^2 \bar{x}}{dt}$

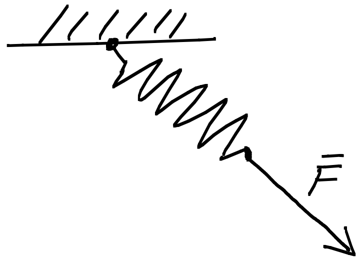
1.2 Dynamische Grundbegriffe

Massenpunkt: wichtige Idealisierung, die einen unendl. kleinen Körper mit endl. Masse ($m \neq 0$) annimmt; keine inneren Freiheitsgrade (wie Rotation, Kompression etc.)

Kraft: Ursache von Bewegungsänderung; quantifiziert durch Vektor, $\bar{F} = (F^1, F^2, F^3)$;

- man denke an Muskelkraft, Federkraft etc.
- unterliegt der Vektoraddition*): $\bar{F}_1$ und $\bar{F}_2$ können durch $\bar{F} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2$ ersetzt werden
- Beispiel für Meßvorschrift:

  masselose Feder sei an einem Ende befestigt;



die Richtung der Feder und ihre Verlängerung erlauben die Bestimmung der am anderen Ende angreifenden Kraft.

- anderes Beispiel:

  konstantes Kraftfeld $\bar{F} = \bar{F}(\bar{x}, t) = \bar{F}(\bar{x})$ sei aufgrund der Bewegung eines Probekörpers bekannt; für einen anderen sich darin bewegenden Körper kennt man dann an jedem Pkt. die auf ihn wirkende Kraft.

*) Für Kräfte, die an ein und denselben Pkt. angreifen

1.3 Newtonsche Axiome

1) $\exists$ Inertialsysteme, d.h. Koordinatensysteme in denen ein Massenpkt. an dem keine Kraft angreift ruht oder sich gradlinig u. gleichförmig bewegt: $\ddot{\bar{x}} = 0$.
2) In solchen Systemen gilt $\bar{F} = m\ddot{\bar{x}}$
3) Für die Kräfte zwischen zwei Massenpunkten gilt

$1 \bullet \Longleftrightarrow \bullet\, 2$ ($\bar{F}_{12}$ ist die Kraft von 2 auf 1)

$\bar{F}_{12} = -\bar{F}_{21}$

Kommentare:

- "1)" kann als Spezialfall von "2)" angesehen werden.
- "2)" ist nicht einfach die Definition der Kraft. $\bar{F}$ muß unabhängig (z.B. durch Federkraftmesser, Kraftfeld, Anwendung von "3)") bekannt sein.
- Masse ist Körpereigenschaft und "2)" kann zur Definition der (trägen) Masse herangezogen werden.
- Der entscheidende phys. Gehalt von "2)" ist das Auftreten von $\ddot{\bar{x}}$ (nicht etwa $\dot{\bar{x}}$ oder $\dddot{\bar{x}}$).

1.4 Beschreibung der Bewegung durch Differentialgleichungen

Massenpkt. in allgemeinem Kraftfeld:

$$\ddot{\bar{x}} = \frac{1}{m}\bar{F}(\bar{x}, \dot{\bar{x}}, t) \quad \text{ist zu lösen.}$$

tritt z.B. bei Reibung auf

Dies ist ein System von 3 gewöhnl. Diff.gl.en 2. Ordnung.

wegen x^1, x^2, x^3 — nur Ableitungen nach einer Variablen, t — höchste Ableitung ist $\ddot{\bar{x}}$

(in Feldtheorie u. Kontinuumsmechanik werden auch Ableitungen nach Ort auftreten) ↪ "partielle Dgl.-en"

Etwas allgemeiner:

$\bar{x} = (x^1, \cdots, x^n) \in \mathbb{R}^n$, $\bar{x}(t)$ ist Abb. $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$

$\boxed{\ddot{\bar{x}} = \bar{f}(\dot{\bar{x}}, \bar{x}, t) \text{ ist System von } \underline{\underline{n \text{ Dgl.-en } 2. \text{ Ordn.}}}}$

Oft nützlich:

definiere $\bar{y}(t) = \dot{\bar{x}}(t)$

$\Rightarrow$ $\boxed{\dot{\bar{y}} = \bar{f}(\bar{y}, \bar{x}, t)\,;\ \dot{\bar{x}} = \bar{y} \text{ ist äquivalentes System von } \underline{\underline{2n \text{ Dgl.-en } 1. \text{ Ordn.}}}}$

Nach Umbenennung $(x^1, \cdots, x^n, y^1, \cdots, y^n) \to (x^1, \cdots, x^{2n})$ und anschließend $2n \equiv n'$, $n' \to n$ können wir also an folgendes System denken:

$$\boxed{\dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x}, t)\,, \quad \bar{x} \in \mathbb{R}^n} \qquad (*)$$

Dafür gilt der <u>Existenz- u. Eindeutigkeitssatz</u>:

> Gegeben t_0 und $\bar{x}_0$, so existiert in einer Umgebung von t_0 eine eindeutige Lösung von $(*)$ mit $\bar{x}(t_0) = \bar{x}_0$ falls die f^i in einer Umg. von (t_0, x_0) stetig differenzierbar sind.

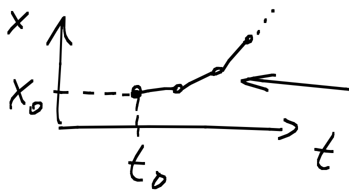
- Eigentlich genügt eine "Lipschitzbedingung" (mehr Details: → "Anfangswertproblem", "Cauchy-Problem" in Mathematik-Texten)

- Für unseren Fall eines Massenpunktes:

  3 Dgl.-en 2. Ordn. ⇒ 6 Dgl.-en 1. Ordn.

  ⇒ 6 Anfangsbedingungen $(\bar{x}_0, \dot{\bar{x}}_0)$ bei t_0 benötigt.

① Einfachster Fall: $(n=1$, also $\dot{x} = f(x,t))$



Da die Steigung an jedem Pkt. bekannt ist, kann man die gesuchte Kurve offensichtlich "stückchenweise" beliebig genau konstruieren.

*)

- Beachte: Es ist nicht immer sinnvoll, zu einem System 1. Ordnung überzugehen; manchmal kann man das System 2. Ordn. direkt lösen

1.5 Freier Fall mit Reibung

(Dies soll gleichzeitig als Beispiel für das Lösen einer Aufgabe dienen)

- Ein Körper der Masse m wird im Schwerefeld der Erde fallen gelassen. Die Luftreibung sei $F_R = c \cdot v^2$. Bestimmen Sie die zeitl. Entwicklung der Geschwindigkeit.

- Lösung: – Problem eindimensional
  – x wachse nach unten, Start bei $x=0$, $t=0$ (mit $\dot{x} = 0$)

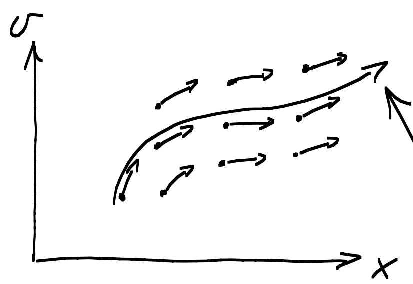
② <u>Zweiteinfachster Fall:</u> ($n = 2$, also z.B. $\dot{x} = f_1(x,v,t)$
$\dot{v} = f_2(x,v,t)$)

Dieser Fall tritt in der Analyse der eindim. Bewegung eines Massepkt.-en in einem Kraftfeld $F(x)$ auf:

$$m\ddot{x} = F(x) \xrightarrow{\text{Setz } \dot{x} = v} \left.\begin{aligned} \dot{x} &= v \\ \dot{v} &= F(x)/m \end{aligned}\right\}$$

Definiert Vektorfeld in 2 Dim.-en

Graphisch darstellbar durch

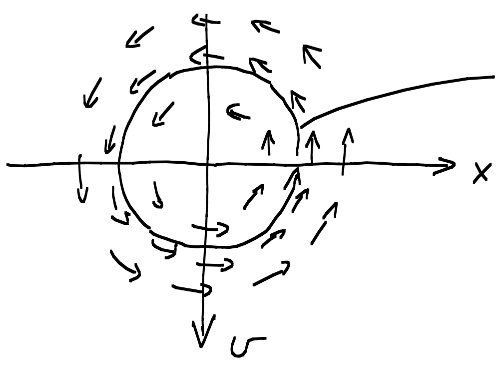


solch eine Kurve ist bei Vorgabe eines Startpkt.-es stets definiert

<u>Noch konreter!</u>

harmon. Oszillator: $F(x) = -kx$

Mit $k = 2$; $m = 1$ $\Rightarrow$ $\dot{x} = v$
$\dot{v} = -x$



Diese Kreise beschreiben die wohlbekannte oszillierende Bewegung um den Ursprung.

- Dgl.: $F = m\ddot{x} \Rightarrow mg - c\dot{x}^2 = m\ddot{x}$
- Übergang zu 2 Dgl.-en 1. Ordn.: $\dot{x} = v$

$$\Rightarrow mg - cv^2 = m\dot{v} \; ; \; \dot{x} = v$$

- Die erste Gl. enthält x nicht und kann unabhängig gelöst werden:

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{c}{m} v^2$$

- Separation der Variablen (links nur dt & t; rechts nur dv & v) liefert:

$$dt = \frac{dv}{g - \frac{c}{m} v^2}$$

- Definiere $t' = t/\hat{t}$, $v' = v/\hat{v}$ mit $\hat{t} = \sqrt{\frac{m}{gc}}$, $\hat{v} = \sqrt{\frac{gm}{c}}$:

$$dt' = \frac{dv'}{1 - v'^2} = \frac{dv'}{2}\left(\frac{1}{1+v'} + \frac{1}{1-v'}\right)$$

$$2t' = \ln(1+v') - \ln(1-v') + \text{const.}$$

$$v' = 0 \text{ bei } t' = 0 \Rightarrow \text{const.} = 0$$

$$e^{2t'} = \frac{1+v'}{1-v'} \; ; \; e^{2t'} - v' e^{2t'} = 1 + v'$$

$$v' = \frac{e^{2t'} - 1}{e^{2t'} + 1} = 1 - \frac{2}{e^{2t'} + 1}$$

$$\underline{\underline{v = \hat{v} \cdot \left(1 - \frac{2}{e^{2t/\hat{t}} + 1}\right)}} \quad \text{mit } \hat{t} = \sqrt{\frac{m}{gc}}, \; \hat{v} = \sqrt{\frac{gm}{c}}$$

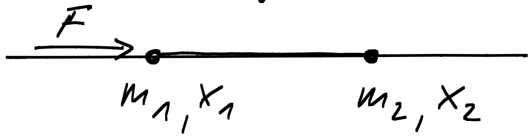
($x(t)$ folgt nach Integration aus $\dot{x} = v \Rightarrow dx = v\,dt$.)

1.6 Elementarer Zugang zum starren Körper

- starre Körper können als Kombination vieler starr verbundener Massenpunkte aufgefaßt werden.

Einfaches Beispiel:

1-dim. Bewegung zweier starr verbundener Massenpkte:



; äußere Kraft F auf m_1

Newton: $m_1 \ddot{x}_1 = F + F_{12}$

$$m_2 \ddot{x}_2 = F_{21} = -F_{12}$$

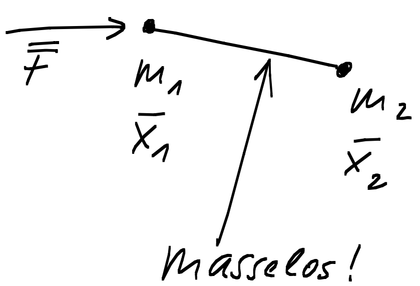
außerdem gilt $x_1 - x_2 = \text{const.}$, also $\ddot{x}_1 = \ddot{x}_2$

$$\Rightarrow \frac{1}{m_1}(F + F_{12}) = -\frac{1}{m_2} F_{12} .$$

Auflösen nach F_{12} und Einsetzen in Newt. Grundgl. für x_1 oder x_2 liefert Dgl. 2. Ordn. für 1 Variable und damit die prinzipielle Lösung.

Nicht ganz so einfaches Beispiel:

3-dim. Bewegung zweier starr verbundener Massenpunkte:



; äußere Kraft $\bar{F}$ auf m_1

Newton: $m_1 \ddot{\bar{x}}_1 = \bar{F} + \bar{F}_{12}$

$m_2 \ddot{\bar{x}}_2 = -\bar{F}_{12}$;

Man kann diese beiden Bedingungen als Def. der masselosen starren Stange auffassen.

außerdem gilt $|\bar{x}_1 - \bar{x}_2| = \text{const.}$ und $\bar{F}_{12} = \alpha \cdot (\bar{x}_1 - \bar{x}_2)$

(Kraft nur parallel zur Stange).

Beachte: $|\bar{x}_1 - \bar{x}_2| = \text{const.} \Rightarrow 2(\dot{\bar{x}}_1 - \dot{\bar{x}}_2)^2 + 2(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)\cdot(\ddot{\bar{x}}_1 - \ddot{\bar{x}}_2) = 0$, $\dot{\bar{x}}_i$ gegeben

Dies sind 10 Gleichungen (3 vektorielle + 1 skalare) für $\ddot{\bar{x}}_1$, $\ddot{\bar{x}}_2$, $\bar{F}_{12}$ und α. Wir können also $\ddot{\bar{x}}_1$, $\ddot{\bar{x}}_2$ bestimmen und das Problem (zumindest numerisch) schrittweise lösen. (Wir werden später bessere Methoden für solche Probleme mit "Zwangsbedingungen" kennenlernen.)

Noch allgemeiner:

3 , 4 , ... starr verbundene Massenpunkte

Gegeben die äußeren Kräfte, kann man (wie oben im Beispiel) stets die Kräfte in den Stangen und die Beschleunigungen der Massenpkt.e bestimmen.

$\Rightarrow$ Die Dynamik des starren Körpers (als "Kontinuumslimes obiger Konstruktionen) ist durch Newtonsche Axiome definiert.