14 Poisson-Klammer

14.1 Definition der Poisson-Klammer

- betrachte ein Hamiltonsches System: $\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$, $\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$
- betrachte beliebige Fkt. $F(\underset{\uparrow}{q}, \underset{\uparrow}{p}, t)$ ("eine Observable")

  alle q_i, alle p_i
- totale Zeitableitung:

$$\frac{d}{dt} F(q,p,t) = \frac{\partial F}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial F}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial F}{\partial p_i} \dot{p}_i$$

$$= \frac{\partial F}{\partial t} + \sum_i \left(\frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right)$$

<u>Def.:</u> $\{F, G\} \equiv \sum_i \left(\frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial q_i} \right)$ heißt die "Poissonklammer" der Funktionen $F(q,p,t)$ & $G(q,p,t)$.

<u>Damit folgt:</u> $\dot{F} = \frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \{F, H\}$

(Die zeitl. Entwicklung einer Observablen wird durch die Poissonklammer mit H bestimmt.)

Dies kann natürlich insbesondere auf die "fundamentalen" Observablen p & q angewandt werden:

$$\dot{p}_i = \{p_i, H\} \quad \left(= \sum_j \left[\frac{\partial p_i}{\partial q_j} \frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial p_i}{\partial p_j} \frac{\partial H}{\partial q_j} \right] = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \right)$$

$$\underbrace{\dot{q}_i = \{q_i, H\}}_{\text{elegante Formulierung der Hamilton-Gleichungen}} \quad \left(= \quad \cdots \quad = \frac{\partial H}{\partial p_i} \right)$$

- Für die zueinander kanonisch konjugierten Variablensätze q_i & p_j gilt: $\{q_i, q_j\} = 0$, $\{p_i, p_j\} = 0$, $\{q_i, p_j\} = \delta_{ij}$

Als Beispiel rechnen wir nach:

$$\{q_i, p_j\} = \sum_k \left(\frac{\partial q_i}{\partial q_k} \frac{\partial p_j}{\partial p_k} - \frac{\partial q_i}{\partial p_k} \frac{\partial p_j}{\partial q_k} \right) = \sum_k \left(\delta_{ik} \delta_{kj} - 0 \right) = \delta_{ij}$$

(Die anderen beiden Relationen folgen analog.)

14.2 Die Poissonklammer als Lie-Algebra-Operation

- Sei V der Raum der Fkt.-en auf dem Phasenraum (nicht explizit t-abhängig). V ist in einer offensichtlichen Weise ein Vektorraum.

- Die Poissonklammer definiert eine Abb. $V \times V \longrightarrow V$
$$F, G \longmapsto \{F, G\}$$

- Es gilt (1) $\{F, G\} = -\{G, F\}$ ("Antisymmetrie")
  (2) $\{\lambda F + \nu G, J\} = \lambda \{F, J\} + \nu \{G, J\}$ $(\lambda, \nu \in \mathbb{R})$
  ("Linearität")
  (3) $\{F, \{G, J\}\} + \underbrace{\{G, \{J, F\}\} + \{J, \{F, G\}\}}_{\equiv \text{"+ zykl. Permutationen"}} = 0$
  ("Jacobi-Identität")

- Diese 3 Eigenschaften machen das Paar V, $\{\cdot, \cdot\}$ zu einer Lie-Algebra.

- (3) kann mittels (1) auch in die "Derivations-Form" gebracht werden: $\{F, \{G, J\}\} = \{\{F, G\}, J\} + \{G, \{F, J\}\}$.

(Heißt so, weil es an "$\frac{d}{dt}(f \cdot g) = (\frac{d}{dt} f) g + f (\frac{d}{dt} g)$" erinnert.)

- (1) ist leicht nachzurechnen:

$$\{F,G\} = \sum_i \left(\frac{\partial F}{\partial q_i}\frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{\partial G}{\partial q_i}\right) = -\sum_i \left(\frac{\partial G}{\partial q_i}\frac{\partial F}{\partial p_i} - \frac{\partial G}{\partial p_i}\frac{\partial F}{\partial q_i}\right)$$

Es ist insbesondere $\{F,F\}=0$ für jedes F. $\qquad = -\{G,F\}$

- Falls H nicht explizit von t abhängt, gilt somit

$$\frac{d}{dt}H = \frac{\partial}{\partial t}H + \{H,H\} = 0\,.$$

- Falls F eine nicht explizit von t abhängende Erhaltungsgröße ist, gilt

$$0 = \frac{d}{dt}F = \frac{\partial}{\partial t}F + \{F,H\} = 0 + \{F,H\}\,,$$

also $\underline{\{F,H\}=0}$ (F ist erhalten $\Leftrightarrow$ Poissonklammer mit H verschwindet)

<u>Beispiel:</u> $H = \sum_{i=1}^{3} \frac{p_i^2}{2m} + V(q_1,q_2,q_3)$

$$\{p_j,H\} = -\sum_{k=1}^{3} \frac{\partial p_j}{\partial p_k}\frac{\partial H}{\partial q_k} = -\frac{\partial V}{\partial q_j}$$

$\Rightarrow$ p_j ist erhalten falls V nicht von q_j abhängt.

<u>14.3 Herleitung der Jacobi-Identität</u> (fortgeschritten)

Schreibe $\{F,G\} = D_F G$, wobei D_F ein auf die Fkt. G wirkender Differentialoperator ist. Explizit gilt

$$D_F = \sum_i \frac{\partial F}{\partial q_i}\frac{\partial}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial q_i}$$

(3) kann dann geschrieben werden als $D_{\{F,G\}}J = (D_F D_G - D_G D_F)J$

($\rightarrow$ $\{\{F,G\},J\} = \{F,\{G,J\}\} - \{G,\{F,J\}\}$ $\xrightarrow[(1)]{}$ Jacobi-Id.)

Wir brauchen also nur die Operator-Identität

$$D_{\{F,G\}} = D_F D_G - D_G D_F \equiv \underbrace{[D_F, D_G]}_{\text{"Kommutator"}}$$

nachzurechnen.

Zur Vereinfachung schreiben wir $\frac{\partial F}{\partial q_i} \equiv F_{q_i}$ etc. und nutzen die Summenkonvention.

z.B. gilt
$$\{F,G\} = F_{q_i} G_{p_i} - (F \leftrightarrow G)$$

A) $$D_{\{F,G\}} = \{F,G\}_{q_j} \frac{\partial}{\partial p_j} - \{F,G\}_{p_j} \frac{\partial}{\partial q_j}$$

$$= (F_{q_i} G_{p_i})_{q_j} \frac{\partial}{\partial p_j} - (F_{q_i} G_{p_i})_{p_j} \frac{\partial}{\partial q_j} - (F \leftrightarrow G)$$

$$= \left(F_{q_i q_j} G_{p_i} + F_{q_i} G_{p_i q_j}\right) \frac{\partial}{\partial p_j} - \left(F_{q_i p_j} G_{p_i} + \underline{F_{q_i} G_{p_i p_j}}\right) \frac{\partial}{\partial q_j} - (F \leftrightarrow G)$$

B) $$[D_F, D_G] = \left(F_{q_i} \frac{\partial}{\partial p_i} - F_{p_i} \frac{\partial}{\partial q_i}\right)\left(G_{q_j} \frac{\partial}{\partial p_j} - G_{p_j} \frac{\partial}{\partial q_j}\right) - (F \leftrightarrow G)$$

Terme, bei denen beide Ableitungen nach rechts wirken, heben sich weg. Also:

$$= F_{q_i} G_{p_i q_j} \frac{\partial}{\partial p_j} - \underline{F_{q_i} G_{p_j p_i} \frac{\partial}{\partial q_j}} - F_{p_i} G_{q_i q_j} \frac{\partial}{\partial p_j} + F_{p_i} G_{q_i p_j} \frac{\partial}{\partial q_j} - (F \leftrightarrow G)$$

Jetzt kann man die Gleichheit von A) & B) durch "genaues Hinsehen" verifizieren:

- z.B. der Term "$-F_{q_i} G_{p_i p_j} \frac{\partial}{\partial q_j}$" tritt in A) & B) auf
- z.B. dem Term "$-F_{p_i} G_{q_i q_j} \frac{\partial}{\partial p_j}$" von B) steht der Term "$G_{p_i} F_{q_i q_j} \frac{\partial}{\partial p_j}$" bei A) gegenüber. Also ist der passende Term

in "$-(F \leftrightarrow G)$" enthalten.

- usw. usf. ... | elegantere & abstraktere Herleitung → Arnold

Wir haben gezeigt, daß die Poissonklammer den Raum der Fkt.-en auf dem Phasenraum zur Lie-Algebra macht.

14.4 Poissonklammer & Vektorfelder

<u>Noch besser:</u> Die Poissonkl. ordnet jeder Fkt. ein einen Diff.-op. 1. Ordnung ("D_F") zu. Man nennt dies auch ein "Vektorfeld".

(Diff.-op. 1. Ordn. auf $\mathbb{R}^n$: $\sum_{i=1}^{n} \underbrace{V^i(x^1 \dots x^n)}_{\text{"Vektor an jedem Pkt.} \Rightarrow \text{Vektorfeld"}} \frac{\partial}{\partial x^i}$)

Vektorfelder haben auf jedem Raum eine "natürliche" Lie-Alg. Struktur, die durch den Kommutator definiert ist:

$$(V^i\partial_i \, , \, W^j\partial_j) \longmapsto [V^i\partial_i, W^j\partial_j] = V^i\partial_i W^j\partial_j - W^j\partial_j V^i\partial_i$$
$$= V^i(\partial_i W^j)\partial_j - W^j(\partial_j V^i)\partial_i$$

Die Jacobi-Id. ist bei einer durch Kommutator ("Hintereinanderausführung") definierten Lie-Algebra-Operation immer leicht nachzurechnen. Wir haben oben einfach nur gezeigt,

daß die Zuordnung $F \to D_F$ den Raum der Fkt.-en auf die Lie-Alg. der Vektorfelder abbildet, wobei die Poissonkl. in den Kommutator übergeht. Damit wird der Raum der Fkt.-en natürlich zur Lie-Algebra.

<u>Kommentar:</u> Vektorfelder definieren stets eine infinitesimale Bewegung auf dem Raum: $x^i \to x^i + \underset{\text{"klein"}}{\varepsilon} \cdot V^i(x)$.
(an jedem Pkt.!)

Durch Hintereinanderausführung vieler solcher infinit. Bewegungen läßt sich (im entsprechenden Limes) eine endliche Bewegung definieren. Das H entsprechende Vektorfeld generiert in diesem Sinne gerade die "phys. Bewegung" des Systems im Phasenraum. Eine Erhaltungsgröße ist eine unter dieser Bewegung (im Sinne von Abb. des Phasenraumes auf sich selbst) invariante Fkt.

14.5 Die Drehimpuls-Lie-Algebra der Hamilton-Mechanik

- Betrachte einen Massenpkt., $q_i \equiv x_i$ $(i = 1,2,3)$ – Kartes. Koord.
- Komponenten des Drehimpulsvektors: $\underbrace{L_i = \varepsilon_{ijk} x_j p_k}$

aufzufassen als eine Funktion, die auf dem durch $\{x_i, p_i\}$ definierten Phasenraum definiert ist

$$\{L_1, L_2\} = \{x_2 p_3 - x_3 p_2,\ x_3 p_1 - x_1 p_3\}$$

$$= \{x_2 p_3, x_3 p_1\} - \{x_2 p_3, x_1 p_3\} - \{x_3 p_2, x_3 p_1\} + \{x_3 p_2, x_1 p_3\} \qquad (*)$$

- Zur Berechnung erweist sich eine weitere Eigenschaft der Poissonklammer als nützlich:

Derivationseigenschaft bzgl. einfacher Multiplikation:

$$\{F, G\cdot J\} = \{F, G\}\cdot J + G\{F, J\}$$

Begründung: $\{F, G\cdot J\} = D_F(G\cdot J)$

D_F: Diff.operator (= Ableitungsoperator) 1. Ordnung

Die Behauptung folgt somit aus der Leibnizregel.

- Damit folgt z.B. für den 1. Term von (*):

$$\{x_2 p_3, x_3 p_1\} = \{x_2 p_3, x_3\} p_1 + x_3 \{x_2 p_3, p_1\}$$
$$= \{x_2, x_3\} p_3 p_1 + x_2 \{p_3, x_3\} p_1 + x_3 \{x_2, p_1\} p_3 + x_3 x_2 \{p_3, p_1\}$$
$$= -x_2 p_1 \quad \text{(und analog für die restlichen 3 Terme)}$$

$$\Rightarrow \{L_1, L_2\} = -x_2 p_1 - 0 - 0 + p_2 x_1 = x_1 p_2 - x_2 p_1 = L_3 .$$

- Analog für die anderen L_i. Insgesamt:

$$\{L_i, L_j\} = \sum_k \varepsilon_{ijk} L_k \quad \text{für } i,j = 1,2,3 .$$

$\Rightarrow$ Unter der Poissonklammer bildet der Drehimpuls eine <u>Unter-Lie-Algebra</u> der Lie-Alg. der Observablen.

↑ Der durch $L_1 .. L_3$ aufgespannte Unter-Vektorraum (aus dem die Poiss. Kl. <u>nicht</u> herausführt)

- Interessante Anwendung: L_1, L_3 erhalten $\rightarrow$ L_3 erhalten.

$$\left(\{L_1, H\} = 0 , \{L_2, H\} = 0 \Rightarrow \{L_3, H\} = \{\{L_1, L_2\}, H\} = 0 \right.$$
wegen Jacobi-Identität.)

- Verallgemeinerung:
  Die Erhaltungsgrößen (≡ alle Observablen, deren Poiss. Kl. mit H verschwindet) bilden eine Lie-Algebra (Herleitung genau wie oben).

14.6 Die Drehimpuls-Lie Algebra als Lie-Algebra der SO(3)

Sei V der Vektorraum der $N \times N$-Matrizen und

$$V \times V \longrightarrow V$$
$$A, B \longmapsto [A, B] \equiv A \cdot B - B \cdot A \quad (\text{"Kommutator"}).$$

Damit wird V zur Lie-Algebra (die Eigenschaften (1) – (3) sind leicht nachzuprüfen).

Eine wichtige Unteralgebra ($\mathrm{Lie}(SO(N))$ oder $so(N)$) wird durch die infinitesimalen Drehungen im $\mathbb{R}^N$ definiert. Wir besprechen dies am Fall $N=3$:

$$R \in SO(3) \text{ kleine Drehung} \Rightarrow R = \mathbb{1} + \varepsilon \varphi^i T^i + O(\varepsilon^2)$$

$$\text{mit} \quad T^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad T^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(vgl. 4.2)

Leicht nachzuprüfen: $[T^i, T^j] = -\sum_k \varepsilon^{ijk} T^k$ $\Big[$bzw. $[(-T^i),(-T^j)] = \varepsilon^{ijk}(-T^k)\Big]$

$\Rightarrow$ Die Lie-Alg. der $(-T^i)$'s ist "isomorph" zur Lie-Alg. der L_i's.

Dies ist kein Zufall:

$SO(3)$-Symm. des $\mathbb{R}^3$ generiert durch $\mathrm{Lie}(SO(3))$

$\Downarrow$

Noether-Theorem: $\exists$ 3 Erhaltungsgrößen der Lagrange-Mech.

$\Downarrow$

3 Erhaltungsgrößen der Hamilton-Mech., bilden Lie-Alg. unter Poiss.-Klammer, und zwar genau die $\mathrm{Lie}(SO(3))$.

Schlußkommentar: Poissonkl.-Formulierung der Hamilton-Mech. steht in engem Zush. zur Quantenmech.:

Mechanik: Fkt. $F(q,p)$ $\qquad \dot{F} = \{F, H\}$

QM: Matrix F $\qquad \dot{F} = \frac{1}{i\hbar}[F, H]$

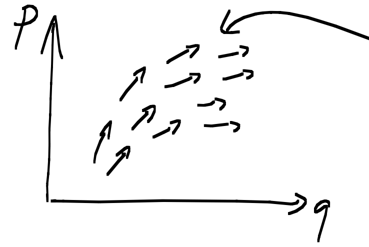
(evtl. ∞-dimensional, auch "Operator") $\qquad$ "Hamilton-Operator"

14.7 Satz v. Liouville

- $\bar{\xi}(t) = (q_1(t), \dots, q_n(t), p_1(t), \dots, p_n(t))$ beschreibe die Trajektorie eines phys. Systems im Phasenraum.

- $\bar{\omega}(t) = \dfrac{d\bar{\xi}(t)}{dt} = \left(\dfrac{\partial H}{\partial p_1}, \dots, \dfrac{\partial H}{\partial q_n}, -\dfrac{\partial H}{\partial q_1}, \dots, -\dfrac{\partial H}{\partial q_n}\right)$

  ist zeitunabhängig: $\bar{\omega} = \bar{\omega}(q,p)$ (falls H nicht explizit von t abhängt).



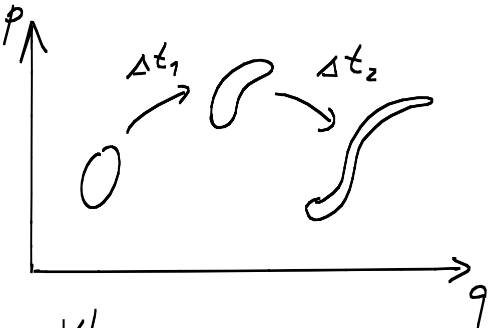
- Es gilt: $\operatorname{div}\bar{\omega} \equiv \bar{\nabla}_{q,p} \cdot \bar{\omega} \equiv \sum_{i=1}^{n}\left(\dfrac{\partial \omega_i}{\partial q_i} + \dfrac{\partial \omega_{n+i}}{\partial p_i}\right)$

$$= \sum_i \left(\frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial p_i} - \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial q_i}\right) = 0$$

$\Rightarrow \bar{\omega}(q,p)$ beschreibt eine "inkompressible Strömung".

- Damit ist intuitiv klar:

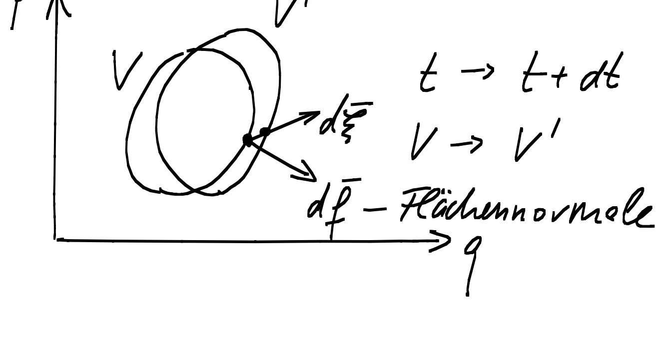
  <u>Satz von Liouville:</u> Die Größe von Teilvolumina des Phasenraumes ändert sich durch die Hamiltonsche Dynamik nicht:



(Die Form kann sich natürlich ändern.)

<u>Genauere Begründung:</u>

Betrachte infinitesimale Bewegung aller Pkt.-e im Startvolumen V:



$$dV = V' - V = \int_O d\bar{f} \cdot d\bar{\xi}$$

Dies sollte aus obigem Bild anschaulich klar sein (das Vorzeichen des Produktes $d\bar{f} \cdot d\bar{\xi}$ entscheidet, "in welche Richtung" V wächst / sich zurückzieht)

Oberfläche von V (oder V')
(Der Unterschied ist im Gesamtergebnis höherer Ordnung)

"Teilen durch dt" $\Rightarrow$ $$\frac{dV}{dt} = \int_O d\bar{f} \cdot \bar{\omega} \underset{\text{Gauß}}{=} \int_V d\text{Vol.} \cdot (\bar{\nabla}\bar{\omega}) = 0$$

✓