# 2 Erhaltungssätze in der Newtonschen Mechanik

## 2.1 Impulserhaltung

Für einen Satz von Massenpunkten (nicht unbedingt starr verbunden) gilt bei $\bar{F}_{\text{äuß}} = 0$:

$$\bar{p} = \sum_a \bar{p}_a \equiv \sum_a m_a \dot{\bar{x}}_a = \text{const.}$$

Begründung: $\dot{\bar{p}} = \sum_a m_a \ddot{\bar{x}}_a = \sum_a \bar{F}_a = \sum_{ab} \bar{F}_{ab}$

$$= \sum_{a>b} \bar{F}_{ab} + \sum_{a<b} \bar{F}_{ab} = \sum_{a>b} \left( \bar{F}_{ab} + \bar{F}_{ba} \right) = 0$$

wegen des 3. Axioms

Kommentar: Falls äußere Kräfte wirken, gilt

$\dot{\bar{p}} = \bar{F}_{\text{äuß}}$. (für System von Massenpunkten oder auch für einzelnen Massenpunkt)

## 2.2 Drehimpulserhaltung

Falls die Kräfte zwischen je 2 Massenpunkten parallel zur Verbindungslinie wirken (z.B. obiges Modell für starren Körper, Planetensystem, ...), gilt außerdem:

$$\bar{L} \equiv \sum_a m_a \bar{x}_a \times \dot{\bar{x}}_a = \sum_a \bar{x}_a \times \bar{p}_a = \text{const.}$$

Einschub: $(\bar{a} \times \bar{b})_i = \varepsilon_{ijk} a_j b_k$ (mit Summenkonvention)

- $\varepsilon_{ijk}$ ist definiert durch $\begin{cases} 1) \text{ totale Antisymmetrie} \\ 2) \ \varepsilon_{123} = 1 \end{cases}$

$\bar{a} \times \bar{b}$ ist ein Axial- oder Pseudovektor, da
1) es sich bei Drehungen wie Vektor verhält (Begründung später)
2) es bei Reflexionen sein Vorzeichen nicht ändert ($\bar{a} \to -\bar{a}$, $\bar{b} \to -\bar{b}$, $\bar{a}\times\bar{b} \to +\bar{a}\times\bar{b}$)

Begründung der Drehimpulserhaltung:

$$\dot{L} = \left(\sum_a m_a \bar{x}_a \times \dot{\bar{x}}_a\right)^{\cdot} = \sum_a m_a \left(\dot{\bar{x}}_a \times \dot{\bar{x}}_a + \bar{x}_a \times \ddot{\bar{x}}_a\right) =$$

$$= \sum_a \bar{x}_a \times \bar{F}_a = \sum_{ab} \bar{x}_a \times \bar{F}_{ab} = \sum_{a>b} \left(\bar{x}_a \times \bar{F}_{ab} + \bar{x}_b \times \bar{F}_{ba}\right)$$

$$= \sum_{a>b} (\bar{x}_a - \bar{x}_b) \times \bar{F}_{ab} = 0 \quad (\text{da } \bar{F}_{ab} \parallel \bar{x}_a - \bar{x}_b).$$

Kommentar:

Falls äußere Kräfte wirken, gilt

$\dot{L} = \bar{M}$, wobei $\bar{M} = \sum_a \bar{x}_a \times \bar{F}_a^{\text{äuß}}$ das Drehmoment ist.

(Insbesondere bleibt Drehimpulserhaltung bestehen, falls alle äuß. Kräfte Zentralkräfte, d.h. $\bar{F}_a \parallel \bar{x}_a$, sind.)

## 2.3 Konservative Kräfte, Energieerhaltung

Ein zeitunabhängiges Kraftfeld $F(\bar{x})$ heißt konservativ falls $\bar{F} = -\bar{\nabla} V$ für ein gewisses Potential $V(\bar{x})$. Für einen Massenpkt. gilt:

$$E = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{kinet.}}}{T} + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{potentielle}}}{V} \equiv \frac{m}{2}\dot{\bar{x}}^2 + V(\bar{x}(t)) = \text{const.}$$

kinet. potentielle Energie

Begründung:

$$\dot{E} = m\dot{\bar{x}}\cdot\ddot{\bar{x}} + \frac{\partial V}{\partial x^i}\cdot\frac{dx^i}{dt} = \bar{F}\cdot\dot{\bar{x}} + (\bar{\nabla}V)\cdot\dot{\bar{x}} = 0$$

Intuitiv: Die Kraft $\bar{F} = -\bar{\nabla}V$ verrichtet Arbeit am Massenpkt. und ändert damit $T$. Gleichzeitig ändert sich $V$, und zwar so, das $T+V=\text{const}$.

Nützliche Tatsache: Für einfach zusammenhängende Gebiete (d.h. jede geschlossene Kurve kann auf Länge Null zusammengezogen werden) gilt:

$$\bar{F} \text{ konservativ} \iff \bar{\nabla}\times\bar{F} = 0 \quad (\varepsilon_{ijk}\,\partial_j F_k = 0)$$

Begründung:

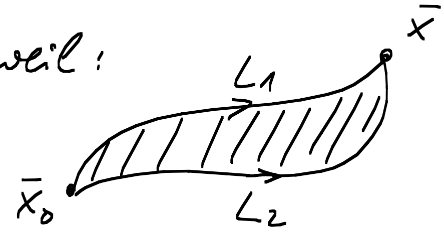
$\Rightarrow$ $\bar{F} = -\bar{\nabla}V$ heißt $F_i = -\partial_i V$

$$\varepsilon_{ijk}\,\partial_j F_k = -\varepsilon_{ijk}\,\partial_j\partial_k V = 0 \text{ wegen } \varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{ikj}.$$

$\Leftarrow$ Wähle beliebiges $\bar{x}_0$ und definiere

$$V(\bar{x}) = -\int_{\bar{x}_0}^{\bar{x}} d\bar{s}\cdot\bar{F}(\bar{s})$$

a) Diese Def. ist eindeutig, weil:




$$\int_{L_2} d\bar{s}\cdot\bar{F} - \int_{L_1} d\bar{s}\cdot\bar{F} = \oint d\bar{s}\cdot\bar{F} \underset{\text{Stokes}}{=} \int d\bar{f}\cdot(\bar{\nabla}\times\bar{F}) = 0$$

(Hier braucht man "einf. zush.", da sonst $L_1$ & $L_2$ i.A. nicht den Rand einer Fläche bilden.)

b) Das gegebene Kraftfeld ist konservativ, da:

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{kleine } \bar{\ell}}}{\bar{\ell} \cdot \bar{F}(\bar{x}) =} - \left( - \int_{\bar{x}}^{\bar{x}+\bar{\ell}} d\bar{s} \cdot \bar{F} \right) = - \left( V(\bar{x}+\bar{\ell}) - V(\bar{x}) \right) = -\bar{\ell} \cdot \bar{\nabla} V(\bar{x})$$

Da $\bar{\ell}$ beliebig war, folgt $\bar{F} = -\bar{\nabla} V$.

## 2.4 Eindimensionale Bewegung

Der Energieerhaltungssatz erlaubt es, die 1-dimensionale Bewegung allgemein zu lösen:

$$E = \frac{m}{2} \dot{x}^2 + V(x) = \text{const.}$$

$$\Rightarrow \dot{x} = \sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))}$$

$$dt = \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E-V(x))}} \quad \Rightarrow \quad t = \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E-V(x))}}$$

(Natürlich muß noch das Integral gelöst und die sich ergebende Fkt. $t = t(x)$ nach $x = x(t)$ aufgelöst werden. Aber dies ist viel einfacher als das Lösen einer allg. Dgl. 2. Ordnung.)

<u>Bemerkung</u>: Die Konservativität ist nicht einschränkend, da in einer Dimension jedes zeitunabhängige Kraftfeld (lokal) konservativ ist.

<u>Begründung</u>: Definiere $V(x) = - \int_{x_0}^{x} F(x')\, dx'$.

Offensichtlich gilt dann $F = -V'$!

## 2.5 Energieerhaltung für System von Massenpkt.en

Gegeben sei ein System von Massenpunkten an Positionen $\bar{x}_a$.
Die Kraft zwischen je 2 von ihnen sei

$$\bar{F}_{ab} = -\bar{\nabla}_a V_{ab}(|\bar{x}_a - \bar{x}_b|) \quad \text{mit} \quad V_{ab} = V_{ba}.$$

Kommentare:

- Diese Bedingung ersetzt unsere obige Forderung der Konservativität.
- Die Potentiale hängen nur vom Abstand ab ($\Rightarrow$ Zentralpotential, Zentralkraft)
- $$(\bar{F}_{ab})_i = -\frac{\partial}{\partial x_a^i} V_{ab}\left(\sqrt{\sum_i (x_a^i - x_b^i)^2}\right) = +\frac{\partial}{\partial x_b^i} V_{ab}\left(\sqrt{\sum_i (x_a^i - x_b^i)^2}\right)$$
  $$= -(\bar{F}_{ba})_i \quad , \text{wie es sein muß!}$$

Energieerhaltung: $E = \sum_a T_a + \frac{1}{2}\sum_{a\neq b} V_{ab} = \sum_a T_a + \sum_{a>b} V_{ab} = \text{const.}$

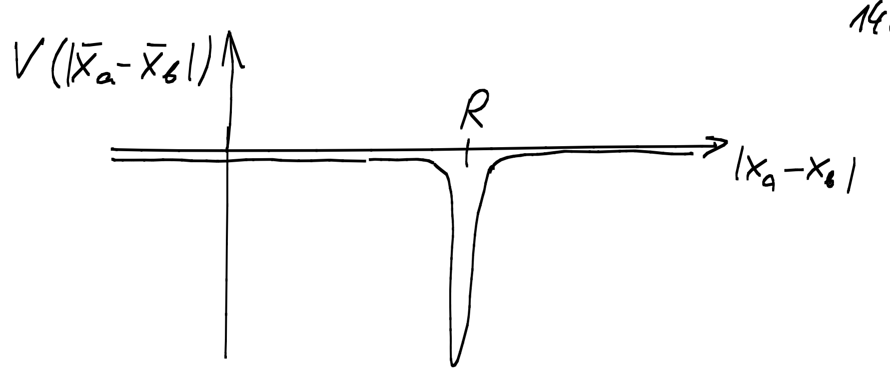
Begründung:
$$\dot{T} = \sum_a \frac{m_a}{2}\left(\dot{\bar{x}}_a^{\,2}\right)^{\cdot} = \sum_a m_a \dot{\bar{x}}_a \cdot \ddot{\bar{x}}_a$$

$$\Rightarrow \dot{E} = \sum_a \dot{\bar{x}}_a \cdot \bar{F}_a + \frac{1}{2}\sum_{a\neq b}\left((\bar{\nabla}_a V_{ab})\cdot\dot{\bar{x}}_a + (\bar{\nabla}_b V_{ab})\cdot\dot{\bar{x}}_b\right) =$$

$$= \sum_{a\neq b} \dot{\bar{x}}_a \cdot \bar{F}_{ab} + \frac{1}{2}\sum_{a\neq b}\left(-\bar{F}_{ab}\cdot\dot{\bar{x}}_a - \bar{F}_{ba}\cdot\dot{\bar{x}}_b\right) = 0$$

Folge: Da die "masselosen Stangen" in unserem Modell eines starren Körpers durch derartige Zentralkräfte*) ersetzt werden können, gilt der Energiesatz für starre Körper.

*) Man denke an:




Solch eine extrem tiefe & extrem steile Potentialmulde fixiert im Wesentlichen den Abstand zwischen $\bar{x}_a$ & $\bar{x}_b$ zu $R$.

## 2.6 Verallgemeinerungen des Stokes'schen Satzes (fortgeschritten)

Der Stokes'sche Satz ist Teil eines wichtigen allgemeinen Systems:

<u>1-dimensional:</u>

$$\int_{\text{Kurve}} d\bar{s} \cdot \bar{\nabla} g = g\big|_{\text{Endpkt.}} - g\big|_{\text{Anf.pkt.}}$$

(Hauptsatz der Differential- u. Integralrechnung)

<u>2-dimensional:</u>

$$\int_{\text{Fläche}} d\bar{f} \cdot (\bar{\nabla} \times \bar{v}) = \int_{\text{Rand (Kurve)}} d\bar{s} \cdot \bar{v}$$

(Stokes)

<u>3-dimensional:</u>

$$\int_{\text{Volumen}} dV \, (\bar{\nabla} \cdot \bar{w}) = \int_{\text{Rand (Fläche)}} d\bar{f} \cdot \bar{w}$$

(Gauß)

⋮

<u>p-dimensional:</u>

$$\int_{V_p} d\omega_{p-1} = \int_{\partial V_p} \underbrace{\omega_{p-1}}$$

(p-1) – Form

äußere Ableitung

Rand von $V_p$

p-dimensionale Untermenge eines n-dimensionalen Raumes ($p \leq n$)