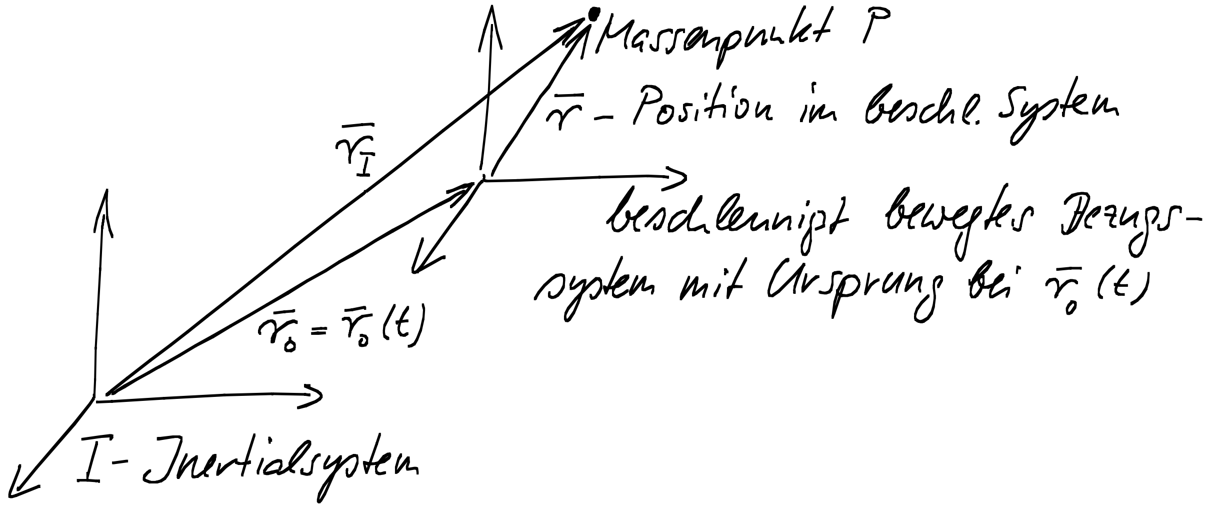
4 Scheinkräfte

4.1 Beschleunigte (nichtrotierende) Bezugssysteme



Keine echten Kräfte $\Rightarrow$ $\ddot{\bar{r}}_I = 0$. (Index "I" für Inertialsystem)

Aus $\bar{r}_I = \bar{r}_0 + \bar{r}$ folgt dann $\ddot{\bar{r}} = -\ddot{\bar{r}}_0$.

Das kann man schreiben als

$$\underline{\underline{m\ddot{\bar{r}} = \bar{F}_s \quad \text{mit} \quad \bar{F}_s = \underbrace{-m\ddot{\bar{r}}_0}_{\text{"Scheinkraft"}}}}\,.$$

Beispiel 1: In einem mit $a_0 = \ddot{r}_0$ beschleunigten Auto bewegt sich ein freier Massenpkt. so, wie sich ein Massenpkt. in einem ruhenden Auto unter Wirkung einer Kraft $F_s = -ma_0$ bewegen würde.

Beispiel 2: Damit der Massenpkt. relativ zum Auto in Ruhe bleibt, muß eine echte Kraft angreifen, so daß

$$m\ddot{r} = F_s + F = 0\,.$$

(Vgl. Kraft der Rückenlehne auf eine Person beim Anfahren.)

4.2 Kleine Drehungen

Betrachte eine Abb. $\mathbb{R} \to SO(3)$; $t \mapsto R(t)$.

Sei $R(0) = \mathbb{1}$. (Man denke zwei sich gegeneinander drehende phys. Anordnungen oder Koordinatensysteme, die bei $t = 0$ gerade zusammenfallen.)

Taylorentwicklung: $R(\epsilon) = \mathbb{1} + \epsilon \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{eine 3x3-Matrix}}}{T} + O(\epsilon^2)$.
$(\epsilon \ll 1)$

$$R(\epsilon) R(\epsilon)^T = \mathbb{1} \implies \mathbb{1} + \epsilon (T + T^T) + O(\epsilon^2) = \mathbb{1}$$

$\implies T + T^T = 0$ (sprich: T ist antisymm.)

Jede antisymm. Matrix kann geschrieben werden als

$$T = -\alpha^i T^i \quad \text{mit} \quad \underbrace{T^1 = \begin{pmatrix} 0&0&0 \\ 0&0&1 \\ 0&-1&0 \end{pmatrix};\ T^2 = \begin{pmatrix} 0&0&-1 \\ 0&0&0 \\ 1&0&0 \end{pmatrix};\ T^3 = \begin{pmatrix} 0&1&0 \\ -1&0&0 \\ 0&0&0 \end{pmatrix}}_{\text{zusammenfassende Schreibweise: } (T^i)^{jk} = \varepsilon^{ijk}}$$

Wichtige Behauptung:

$R(\epsilon)$ beschreibt eine kleine Drehung um die durch $\bar{\alpha}$ definierte Achse um einen Winkel $\varphi = \varepsilon |\bar{\alpha}|$.

Begründung am Beispiel: Wähle $\bar{\alpha} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} |\bar{\alpha}|$. Dann gilt

$$R(\epsilon) = \mathbb{1} + \varepsilon |\bar{\alpha}| \begin{pmatrix} 0&0&0 \\ 0&0&-1 \\ 0&1&0 \end{pmatrix} + O(\varepsilon^2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} + O(\varphi^2).$$

(Benutze $\sin\varphi = \varphi + \cdots$; $\cos\varphi = 1 - \varphi^2/2 + \cdots$)

Kommentar (fortgeschritten):

Wir haben gerade gelernt, daß die antisymm. Matrizen die Lie-Algebra der $SO(N)$ bilden. Allgemeiner als oben hat man mit $T \mapsto e^T \in SO(N)$ eine eineindeut. Abb. zwischen Lie-Alg. u. Lie-Gruppe (in der Umgebung der $\mathbb{1}$).

Wichtige Anwendungen

- Sei eine kleine Drehung charakterisiert durch Drehachse $\overline{\Delta\varphi}$ und Drehwinkel $|\overline{\Delta\varphi}| \ll 1$. (Das entspricht $\varepsilon \equiv 1$ in obigen Formeln. $\bar{\alpha}$ wird durch $\overline{\Delta\varphi}$ ersetzt, was selbst als "klein" angesehen wird.)

  Dann gilt $R_{\overline{\Delta\varphi}} = \mathbb{1} - (\Delta\varphi)^i T^i$

$$(R_{\overline{\Delta\varphi}})^{jk} = \delta^{jk} - (\Delta\varphi)^i \varepsilon^{ijk}$$

  und damit

$$\boxed{(R_{\overline{\Delta\varphi}} - \mathbb{1}) \cdot \bar{v} = \overline{\Delta\varphi} \times \bar{v}}$$

  für einen beliebigen Vektor $\bar{v}$

- Sei nun die Drehung ein kontinuierlicher Prozeß, der bei $t = 0$ mit $\overline{\Delta\varphi} = 0$ beginnt.

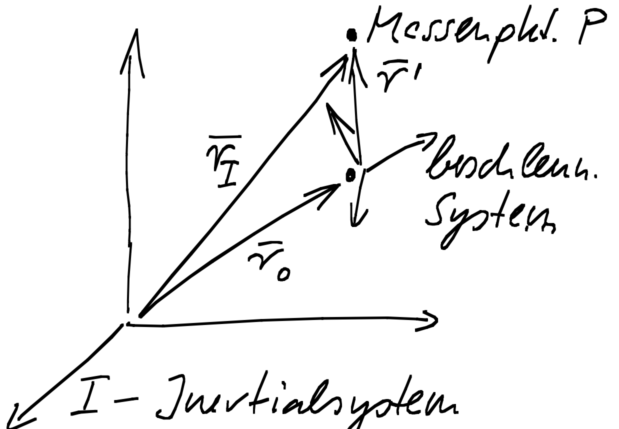
  Die zeitliche Änderung von $\bar{v}$ aufgrund der Drehung ist dann

$$\frac{\Delta \bar{v}}{\Delta t} = \frac{(R_{\overline{\Delta\varphi}} - \mathbb{1}) \cdot \bar{v}}{\Delta t} = \left(\frac{\overline{\Delta\varphi}}{\Delta t}\right) \times \bar{v} = \underline{\underline{\bar{\omega} \times \bar{v}}}$$

$\bar{\omega}$ heißt Winkelgeschwindigkeit.

4.3 Rotierende Koordinatensysteme

Das obige soll nun benutzt werden, um Bewegungen in allgemeinen bewegten (speziell rotierenden) Koordinatensystemen zu beschreiben:



← Dieses System unterscheidet sich von I nicht nur (wie schon bei 4.1) durch Verschiebung $\bar{r}_0$, sondern auch noch durch Drehung $R \in SO(3)$.

- $r_I = r_0 + r' = r_0 + Rr$
- Allgemeine Funktionen $\bar{r}_0(t)$ und $R(t)$ erlauben die Beschreibung der allgemeinsten Bewegung des beschl. Systems
- Im Inertialsystem gilt $m\ddot{\bar{r}}_I = F_I$

  ($F_I = RF$ wenn F die (echte) Kraft aus Sicht des beschl. Systems ist.)

- <u>Also:</u> $m\ddot{\bar{r}}_0 + \underbrace{(Rr)^{\cdot\cdot}} = RF$

  Um die Bewegung aus Sicht des beschl. Systems zu beschreiben, muß dieser Ausdruck vereinfacht werden.

Berechnung von $(Rr)^{\cdot\cdot}$:

- Wir werden Ausdrücke vom Typ $\dot{R}r$ brauchen.
- Schreibe $\dot{R} \simeq \frac{R(t+\Delta t) - R(t)}{\Delta t} = \frac{R_{\Delta t} R(t) - R(t)}{\Delta t}$

  ($R_{\Delta t}$ ist kleine Drehung, wie unser $R_{\Delta\varphi}$ oben)

$$\dot{R}r \simeq \frac{R_{\Delta t} - \mathbb{1}}{\Delta t} \cdot Rr = \underbrace{\omega_I}_{\text{im Inertialsystem}} \times Rr$$

- Schreibe $\omega_I = R\omega$, wobei ω die Winkelgeschw. der Rotation aus Sicht des rotierenden Systems selbst ist.

$$\underline{\dot{R}r = (R\omega) \times (Rr) = R(\omega \times r)}$$

wichtiges Zwischenergebnis!

- Zurück zum Ausgangsproblem:

$$(Rr)^{\cdot\cdot} = (R\dot{r} + \dot{R}r)^{\cdot} = (R\dot{r} + R(\omega \times r))^{\cdot}$$

$$= R\ddot{r} + \dot{R}\dot{r} + \dot{R}(\omega \times r) + R(\dot{\omega} \times r) + R(\omega \times \dot{r})$$

$$= R\left[\ddot{r} + \omega \times \dot{r} + \omega \times (\omega \times r) + \dot{\omega} \times r + \omega \times \dot{r}\right]$$

$$= R\left[\ddot{r} + \omega \times (\omega \times r) + 2\omega \times \dot{r} + \dot{\omega} \times r\right]$$

Einsetzen in $m\ddot{r}_0 + (Rr)^{\cdot\cdot} = RF$ und auflösen nach $m\ddot{r}$ liefert:

$$m\ddot{r} = F - m\Big[\underbrace{R^{-1}\ddot{r}_0}_{\text{durch Beschl. des Ursprungs}} + \underbrace{\omega\times(\omega\times r)}_{\text{Zentrifugal-kraft}} + \underbrace{2\omega\times\dot{r}}_{\text{Coriolis-kraft}} + \underbrace{\dot{\omega}\times r}_{\text{tangentiale Beschleunigung}}\Big]$$

Scheinkräfte

<u>Mehr zur Zentrifugalkraft:</u>

$$[\bar{\omega}\times(\bar{\omega}\times\bar{r})]_i = \varepsilon_{ijk}\,\omega_j\,\varepsilon_{klm}\,\omega_l\,r_m =$$

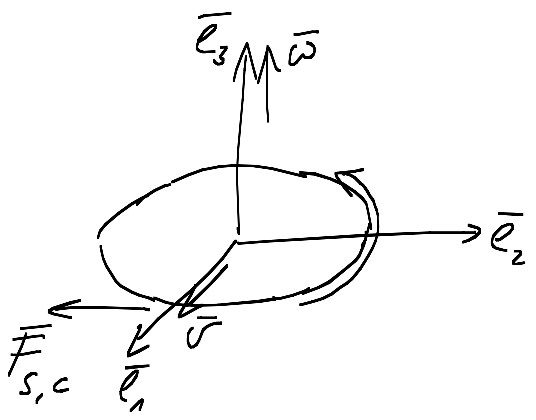
$$= [\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}]\,\omega_j\omega_l r_m = \omega_i(\bar{r}\cdot\bar{\omega}) - r_i(\bar{\omega}^2)$$

Für $\bar{r}\perp\bar{\omega}$ folgt damit $\bar{F}_{S,\,\text{zentrif.}} = (m\omega^2)\cdot\bar{r}$

<u>Mehr zur Corioliskraft</u>

Sei $\dot{\bar{r}}\perp\bar{\omega}$ (etwa $\bar{\omega}\parallel\bar{e}_3$; $\dot{\bar{r}}\parallel\bar{e}_1$). Dann folgt

$$\bar{F}_{S,\,\text{Coriolis}} = -2m|\omega||v|\,\bar{e}_3\times\bar{e}_1 = -2m|\omega||v|\cdot\bar{e}_2 .$$



"Der auf einer Drehscheibe nach außen laufende Massenpkt. hat die Tendenz gegenüber der Drehbewegung der Scheibe zurückzubleiben.

<u>Berühmte Beispiele zu $F_{S,C}$:</u> – Drehrichtung im Abfluß
- globale vorherrschende Windrichtungen auf Nord-/Südhalbkugel
- unterschiedl. Abnutzung der Gleise ; der beiden Flußufer etc.