7 Das Zentralkraftproblem

7.1 Motivation

① Gravitation: $$V(\bar{r}_1 - \bar{r}_2) = -\frac{G_N m_1 m_2}{|\bar{r}_1 - \bar{r}_2|}$$

$$G_N = 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2} \qquad \left(N = \frac{kg\, m}{s^2} \right)$$

Das Auftreten der uns schon aus dem Newtonschen Grundgesetz bekannten "trägen" Massen (m_1, m_2) in dieser Formel ist eine hochgradig nichttriviale Tatsache ("schwere Masse = träge Masse"), die erst im Rahmen der allgemeinen Relativitätstheorie verstanden werden kann.

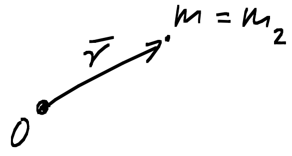
② Elektrostatik: $$V(\bar{r}_1 - \bar{r}_2) = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 |\bar{r}_1 - \bar{r}_2|}$$

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 8.99 \cdot 10^9 \frac{Nm^2}{C^2}$$

(Viel stärker als Gravitation für typische (in "Coulomb" gemessene makroskopische Ladungen.)

Große Vereinfachung: Einer der Körper sei viel schwerer als der andere ($m_2 \ll m_1$). Vernachlässige Bewegung des schweren Körpers ($\bar{r}_1 \equiv 0$, $\bar{r}_2 = \bar{r}$)

⇒ Bewegung eines Körpers im "Zentralpotential"



; $V(\bar{r}) = \frac{c}{|\bar{r}|}$

7.2 Bewegung im allgemeinen Zentralpotential

Versuchen wir zunächst ohne die spezielle Annahme des $\frac{1}{r}$-Potentials auszukommen. Sei $V(\bar{r}) = V(|\bar{r}|)$ eine <u>allgemeine</u> Funktion.

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\dot{\bar{r}}^2 - V(|\bar{r}|)$$

- Symmetrie: $\bar{r} \to \bar{r}' = R\bar{r}$ (R - Drehmatrix)

  $\Rightarrow L = \bar{r} \times \bar{p}$ erhalten (vgl. Kapitel 2.1 und 6).

- Aus $\bar{L} = \text{const.}$ und $\bar{L} \perp \bar{r}$ folgt, daß $\bar{r}$ stets in einer Ebene bleibt (in der Ebene aller zu $\bar{L}$ orthogonalen Vektoren).

- Parametrisiere diese Ebene durch Polarkoordinaten (r, φ):

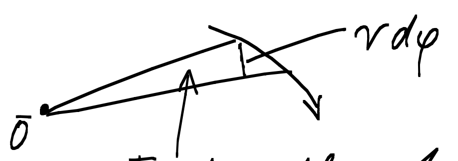
$$\bar{r} = (r\cos\varphi, r\sin\varphi, 0)$$

$$\Rightarrow \dot{\bar{r}}^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2$$

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - V(r)$$

mit $|L| = m|\bar{r} \times \dot{\bar{r}}| = m r \underbrace{(r\dot{\varphi})}_{\text{Tangentialkomponente von } \dot{\bar{r}}} = m r^2 \dot{\varphi} = \text{const.}$

- Geometrische Interpretation der Konstanz von $|\bar{L}|$:



Fläche $df = \frac{1}{2} r \cdot r\,d\varphi = \frac{1}{2} r^2 d\varphi$

$$\frac{df}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\varphi} = \text{const.} \quad (\text{wegen } |\bar{L}| = \text{const.})$$

$\Rightarrow$ "Flächengeschwindigkeit ist konstant" (2. Keplersches Gesetz).

- Symmetrie: $t \to t+\epsilon$ ($\mathcal{L}$ hängt nicht von t ab)
  $\Rightarrow$ Energieerhaltung
- zusammenfassend:

$$\left\| \begin{aligned} E &= \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + V(r) = \text{const.} \\ L &= m r^2 \dot{\varphi} = \text{const.}! \end{aligned} \right\|$$

(nicht mit $\mathcal{L}$ verwechseln!)

Diese beiden Erhaltungssätze werden zur Lösung des Problems genügen!

- Drücke $\dot{\varphi}$ durch L aus ($\dot{\varphi} = L/(mr^2)$) und setze in Energieerhaltung ein:

$$E = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + V(r)$$

- Löse nach dt auf (wie bei Analyse des allgemeinen 1-dimensionalen Problems in 2.4):

$$dt = \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(r)) - \frac{L^2}{m^2r^2}}}$$

$$\text{bzw.} \int dt = \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(r)) - \frac{L^2}{m^2r^2}}}$$

Damit ist die Frage nach $r = r(t)$ im Prinzip beantwortet.

- Die Bahnform erhält man durch $L = mr^2 \frac{d\varphi}{dt}$; $dt = d\varphi \frac{mr^2}{L}$, und einsetzen in obigen Ausdruck für dt:

$$d\varphi \frac{mr^2}{L} = \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(r)) - \frac{L^2}{m^2r^2}}} \quad \Rightarrow \quad d\varphi = \frac{\frac{L}{r^2}\,dr}{\sqrt{2m(E - V(r)) - L^2/r^2}}$$

bzw. $$\varphi = \int dr \, \frac{L/r^2}{\sqrt{2m(E-V(r)) - L^2/r^2}}$$

Damit ist auch die Bahnform $r = r(\varphi)$ im Prinzip bestimmt.

Die explizite Lösung wird für den speziellen Fall $V(r) \sim -\frac{1}{r}$ Kapitel über das Kepler-Problem durchgeführt werden.
(Der Fall des 3-dim. harmonischen Oszillators, $V(r) \sim r^2$ ist auch explizit lösbar.)

7.3 Zwei-Körper-Problem

Die Bedeutung des Zentralkraftproblems wird dadurch verstärkt, daß sich das allgemeine Zwei-Körper-Problem (mit Zentralkraft) darauf zurückführen läßt:

$$\mathcal{L} = \frac{m_1}{2}\dot{\bar{r}}_1^{\,2} + \frac{m_2}{2}\dot{\bar{r}}_2^{\,2} - V(|\bar{r}_1 - \bar{r}_2|)$$

Relativkoordinate : $\bar{r} = \bar{r}_1 - \bar{r}_2$
Schwerpunktkoordinate: $\bar{r}_S = (m_1\bar{r}_1 + m_2\bar{r}_2/M$; $M = m_1 + m_2$

Einfache Algebra liefert: $$\bar{r}_1 = \bar{r}_S + \frac{m_2}{M}\bar{r}$$
$$\bar{r}_2 = \bar{r}_S - \frac{m_1}{M}\bar{r}$$

Einsetzen in $\mathcal{L}$ liefert:

$$\mathcal{L} = \underbrace{\frac{M}{2}\dot{\bar{r}}_S^{\,2}}_{\text{freie Bewegung des Schwerpunktes}} + \underbrace{\frac{m}{2}\dot{\bar{r}}^{\,2} - V(|\bar{r}|)}_{\text{Zentralkraftproblem mit } \infty\text{-schwerem Zentralkörper}} ; \quad \underbrace{m \equiv \frac{m_1 m_2}{M}}_{\text{reduzierte Masse}}$$

- Wichtiges Beispiel bei dem dies wirklich relevant ist:

<u>System Erde-Mond:</u>
- Erde & Mond rotieren um gemeinsamen Schwerpkt.
- Die für die Bewegung relevante Masse ist $m = \frac{m_E m_M}{m_E + m_M} \simeq m_M$

Unterschied klein aber <u>nicht</u> extrem klein.

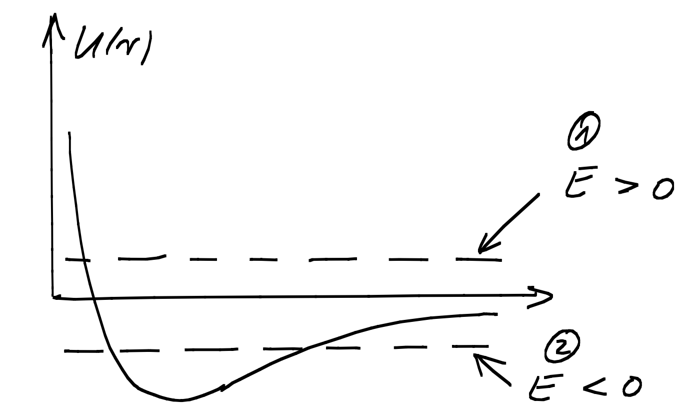
<u>7.4 Kepler-Problem – qualitativ</u>

- Betrachte konkret den Fall der gravit. Zentralkraft, der speziell für die Planetenbewegung relevant ist:

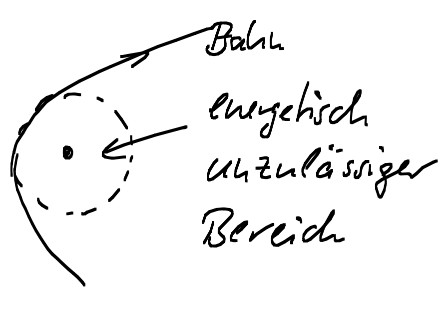
$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right) - V(r) \quad ; \quad V(r) = -\frac{m_1 m_2 G_N}{r} \equiv -\frac{\alpha}{r}.$$

- Energie des äquiv. 1-dim. Problems:

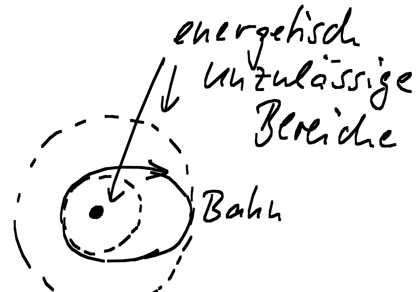
$$E = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + U(r) \quad ; \quad U(r) = \frac{L^2}{2m r^2} - \frac{\alpha}{r}$$



①

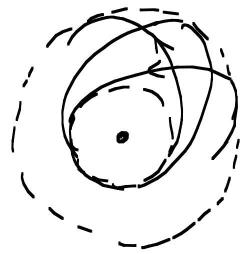


②



Kommentar zu ②:

Das Auftreten einer geschlossenen Bahn ist eine spezielle Eigenschaft des $1/r$-Potentials. Aufgrund des qualitativen Verhaltens von $U(r)$ mit $E<0$ würde man den allgemeineren Fall



erwarten.

7.5 Kepler-Problem – Bahnform

Euler-Lagrange-Gl.-en:

$$0 = \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot r} - \frac{\partial}{\partial r}\right)\mathcal{L} = m\ddot r - m r\dot\varphi^2 + V'(r) \qquad (1)$$

$$0 = \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot\varphi} - \frac{\partial}{\partial \varphi}\right)\mathcal{L} = \frac{d}{dt}\underbrace{(m r^2\dot\varphi)}_{L\,=\,\text{const.}} = 2m r\dot r\dot\varphi + m r^2\ddot\varphi \qquad (2)$$

L = const., wie schon bekannt

Besonders elegante Methode: Kombiniere (1) mit Erhaltungssatz $L = m r^2 \dot\varphi$

$$(1) \Rightarrow \quad m\ddot r = \frac{L^2}{m r^3} - \frac{\alpha}{r^2}$$

Schreibe $\frac{d}{dt}$ in $\frac{d}{d\varphi}$ um, um statt $r(t)$ gleich $r(\varphi)$ zu berechnen:

$$\frac{d}{dt}(\ldots) = \frac{d\varphi}{dt}\frac{d}{d\varphi}(\ldots) = \frac{L}{m r^2}\frac{d}{d\varphi}(\ldots)$$

Insbesondere: $\quad \dot r = \frac{L}{m r^2}\frac{d}{d\varphi}(r) = -\frac{L}{m}\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{r}\right)$

Des Weiteren: $m\ddot{r} = m \frac{L}{mr^2} \frac{d}{d\varphi}\left(-\frac{L}{m}\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{r}\right)\right)$

$$= -\frac{L^2}{mr^2}\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right).$$

Die Eul.-Lagr.-Gl. impliziert also:

$$-\frac{L^2}{mr^2}\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{L^2}{mr^3} - \frac{\alpha}{r^2}$$

$$\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{r} + \frac{m\alpha}{L^2}$$

Setze $u \equiv \frac{1}{r}$, $\frac{d}{d\varphi}(\cdots) \equiv (\cdots)'$

$$\Rightarrow u'' = -u + m\alpha/L^2$$ ($\hat{=}$ harmon. Oszill. im Kraftfeld)

Setze $w \equiv u - m\alpha/L^2$

$$\Rightarrow w'' = -w$$; allg. Lsg.: $w = A\cos(\varphi - \varphi_0)$

$$\Rightarrow \frac{1}{r} - \frac{m\alpha}{L^2} = A\cos(\varphi - \varphi_0)$$

Wir können o.B.d.A. $\varphi_0 = 0$ wählen.

$$\Rightarrow r = \frac{1}{m\alpha/L^2 + A\cos\varphi}$$

bzw. $\underline{\underline{r = \frac{p}{1 + e\cos\varphi}}}$ mit $\underbrace{p = \frac{L^2}{m\alpha}}_{\text{offensichtlich}}$; $\underbrace{e = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{m\alpha^2}}}_{\text{zu prüfen durch explizite Berechnung von } E}$

Kegelschnitt!

Herleitung der obigen Formel für e:

Durch Ableiten von $r = p/(1+e\cos\varphi)$ nach t folgt sofort, daß $\dot r = 0$ bei $\varphi = 0$. An diesem Punkt gilt also

$$E = U(r) = \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{\alpha}{r} \quad \text{für} \quad r = \frac{p}{1+e} = \frac{L^2/(m\alpha)}{1+e}$$

also: $$E = \frac{(1+e)}{L^2/(m\alpha)} \cdot \left(\frac{L^2}{2m} \cdot \frac{(1+e)}{L^2/(m\alpha)} - \alpha \right) = \frac{m\alpha(1+e)}{L^2} \cdot \frac{\alpha}{2} (1+e-2)$$

$$E = (e^2-1)\frac{m\alpha^2}{2L^2} \quad \Rightarrow \quad e = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{m\alpha^2}} \quad ✓$$

7.6 Kegelschnitte

(Kreis, Ellipse, Parabel, Hyperbel)

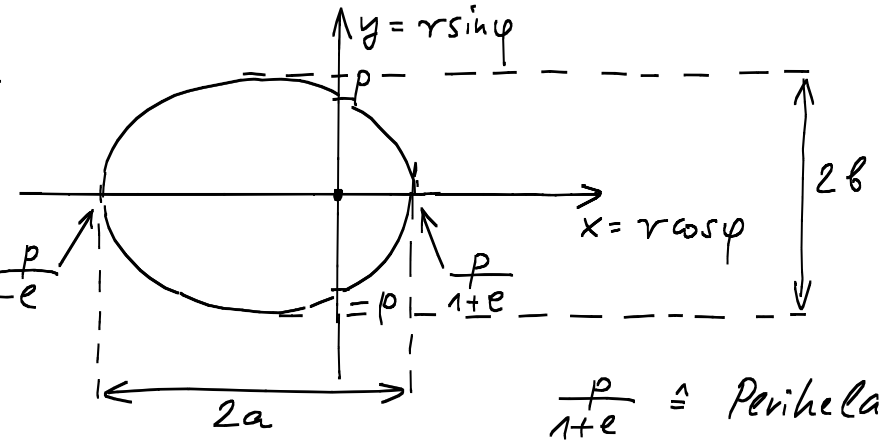
allg. Gleichung: $$r = \frac{p}{1+e\cos\varphi}$$

① $e = 0 \Rightarrow r = \text{const.} \Rightarrow$ Kreisbahn ($E = E_{min}$ für equiv. 1-dim. Problem)

② $0 < e < 1 \Rightarrow r$ bleibt beschränkt für alle φ; erwarte Ellipsenbahn

genauere Analyse: $\varphi = 0 \Rightarrow r = p/(1+e)$
$\varphi = \pi \Rightarrow r = p/(1-e)$
$\varphi = \pm\pi/2 \Rightarrow r = p$

Skizze:



$\frac{p}{1+e}$ ≙ Perihelabstand

$$2a = p\left(\frac{1}{1+e} + \frac{1}{1-e}\right) = \frac{2p}{1-e^2} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{a = \frac{p}{1-e^2}}}$$

(große Halbachse)

b erhalten wir als Maximalwert von y:

Wir können ebensogut y^2 maximieren. Wir fordern also

$$\frac{dy^2}{dr} = 0 \quad \text{wobei} \quad y^2 = (r\sin\varphi)^2 = r^2(1-\cos^2\varphi)$$

$$= r^2\left(1 - \frac{1}{e^2}\left(\frac{p}{r}-1\right)^2\right) = r^2 - \frac{1}{e^2}(p-r)^2.$$

$$\Rightarrow \quad 0 \overset{!}{=} 2\left(r + \frac{1}{e^2}(p-r)\right) \quad \Rightarrow \quad r_0 = \frac{-p/e}{1-1/e^2} = \frac{p}{1-e^2}$$

$$\Rightarrow \quad y_{max}^2 = \frac{p^2}{(1-e^2)^2} - \frac{1}{e^2}\cdot p^2\left(1-\frac{1}{1-e^2}\right)^2 = \frac{p^2}{(1-e^2)^2}\left(1-(-e^2)^2/e^2\right)$$

$$y_{max} = \frac{p}{1-e^2}\cdot\sqrt{1-e^2} = \frac{p}{\sqrt{1-e^2}} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{b = \frac{p}{\sqrt{1-e^2}}}}$$

(kleine Halbachse)

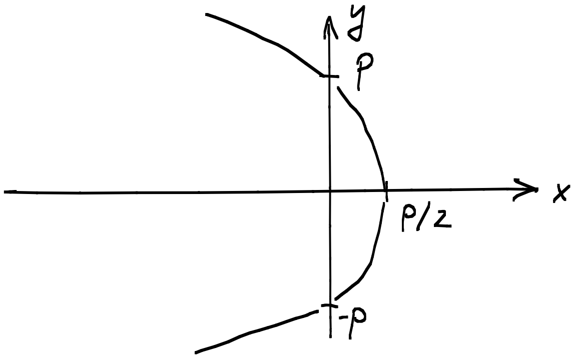
Eine andere Definition der Ellipse ist

$$\frac{\tilde{x}^2}{a^2} + \frac{\tilde{y}^2}{b^2} = 1.$$

(Beachte: Um die Äquivalenz der beiden Definitionen zu zeigen, muß man von obigem Koord. system x, y zu einem neuen System $\tilde{x}, \tilde{y}$ übergehen)

③ $e = 1$, $E = 0$ – Körper kommt "im Unendlichen", wo $U(r) = 0$ ist, zur Ruhe $(T \to 0)$.

$$r = \frac{p}{1+\cos\varphi} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{ll} \varphi = 0 & \Rightarrow r = p/2 \\ \varphi = \pm\pi/2 & \Rightarrow r = p \\ \varphi = \pi & \Rightarrow r = \infty \end{array}$$



Die Kurve ist eine nach links geöffnete Parabel ($\tilde{y} \sim \tilde{x}^2$ in einem geeignet gewählten Koord.system $\tilde{x}, \tilde{y}$)

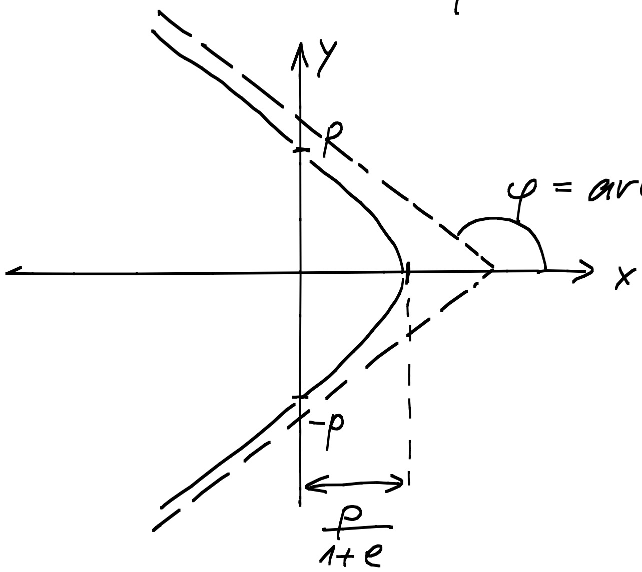
(4) $e > 1$, $E > 0$, d.h. der Körper hat selbst asymptotisch, für $r \to \infty$, noch eine von Null verschiedene Geschwindigkeit $\Rightarrow$ Hyperbel

genauere Analyse: $\quad r = p/(1+e\cos\varphi)$

$\varphi = 0 \Rightarrow r = p/(1+e)$

$\varphi = \pm\pi/2 \Rightarrow r = p$

$r = \infty \Rightarrow 1 + e\cos\varphi = 0$ bzw. $\varphi = \arccos(-1/e)$



Andere Darstellung der Hyperbel: $\quad \frac{\tilde{x}^2}{a^2} - \frac{\tilde{y}^2}{b^2} = 1$

($a = a(p,e)$ & $b = b(p,e)$ leicht zu berechnen, ähnlich wie bei Ellipse)

7.7 Die Trajektorie

Wir kennen die Bahn: $r = r(\varphi)$ bzw. $\varphi = \varphi(r)$.
Die Trajektorie, also $r = r(t)$ & $\varphi = \varphi(t)$ berechnen wir jetzt

mittels des in 7.2 angegebenen Integrals

$$t = \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(r)) - \frac{L}{m^2 r^2}}} \qquad \text{mit } V(r) = -\frac{\alpha}{r}$$

$$t = \int \frac{r\,dr}{\sqrt{\underbrace{\frac{2E}{m}}\, r^2 + \frac{2\alpha}{m} r - \frac{L^2}{m^2}}}$$

Um diesen Vorfaktor aus der Wurzel herauszuziehen, brauchen wir eine Fallunterscheidung bzgl. des Vorzeichens.

<u>Ellipse:</u> $E < 0 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{m}{2|E|}} \int \frac{r\,dr}{\sqrt{-r^2 + \frac{\alpha}{|E|} r - \frac{L^2}{2m|E|}}}$

$$= \sqrt{\frac{m}{2|E|}} \int \frac{r\,dr}{\sqrt{-\left(r - \frac{\alpha}{2|E|}\right)^2 + \frac{\alpha^2}{4|E|^2} - \frac{L^2}{2m|E|}}}$$

Wir benutzen jetzt die schon hergeleiteten Formeln

$$a = \frac{p}{1-e^2} = \frac{L^2/(m\alpha)}{-2EL^2/(m\alpha^2)} = \frac{\alpha}{2|E|}$$

$$\Rightarrow a^2 e^2 = \frac{\alpha^2}{4E^2}\left(1 + \frac{2EL^2}{m\alpha^2}\right) = \frac{\alpha^2}{4|E|^2} - \frac{L^2}{2m|E|}$$

und erhalten

$$t = \sqrt{\frac{m}{2|E|}} \int \frac{r\,dr}{\sqrt{a^2 e^2 - (r-a)^2}}$$

Ersetzung: $r \to s$ mit $r - a \equiv sae$

$$dr = ds\, ae$$

$$\Rightarrow \quad t = \sqrt{\frac{m}{2|E|}} \int \frac{ds\,(s + 1/e)}{\sqrt{1 - s^2}}$$

Wie schon oben, sind trigonometrische Fkt.-en hilfreich: $s \to \eta$: $s \equiv -\cos\eta$; $ds = \sin\eta \, d\eta$

$$t = \sqrt{\frac{m}{2|E|}} \, ae \int d\eta \left(\frac{1}{e} - \cos\eta\right) = \sqrt{\frac{m}{2|E|}} \, ae \left(\frac{\eta}{e} - \sin\eta\right)$$

(Die Integrationskonstante entspricht einer irrelevanten Verschiebung in t)

Also:
$$\left\| \begin{aligned} t &= \sqrt{\frac{ma^2}{2|E|}} \, (\eta - e\sin\eta) \\ r &= a(1 - e\cos\eta) \end{aligned} \right\|$$

Dies ist leider nicht explizit nach r auflösbar.

$\Rightarrow$ Wir müssen uns also mit dieser "Parameterdarstellung" der Fkt. $r = r(t)$ begnügen. $\varphi = \varphi(t)$ folgt sofort, da wir $\varphi = \varphi(r)$ kennen.

<u>Hyperbel:</u> $E > 0$; Eine analoge Rechnung (→ Landau/Lifschitz) liefert

$$\left\| \begin{aligned} t &= \sqrt{\frac{ma^2}{2|E|}} \, (e\sinh\eta - \eta) \\ r &= a(e\cosh\eta - 1) \end{aligned} \right\|$$

7.8 Umlaufzeit (für Ellipsenbahn)

$$T = \int_{1\,\text{Umlauf}} dt \overset{\uparrow}{=} \frac{2m}{L} \int_{1\,\text{Umlauf}} df = \frac{2m}{L} F_{\text{Ellipse}} = \frac{2m}{L} \cdot \pi ab$$

Unter Benutzung von $\frac{df}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot\varphi$ und $L = mr^2\dot\varphi$

Nebenrechnung zur Fläche einer Ellipse:

Ellipse: $(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1$

$\Downarrow$ $x = ax'$, $y = by'$

Kreis: $(x')^2 + (y')^2 = 1$

$$F_{\text{Ellipse}} = \int_{\text{Ellipse}} dx\,dy = ab \int_{\text{Einheitskreis}} dx'dy' = \pi ab \checkmark$$

Also: $T = \frac{2\pi m}{L} \cdot \frac{p^2}{\sqrt{1-e^2}^{\,3}} = \frac{2\pi m}{L} \cdot \frac{(L^2/m\alpha)^2}{(2|E|L^2/m\alpha^2)^{3/2}}$

$$T = \pi\alpha \sqrt{\frac{m}{2|E|^3}}$$

Andere Form: $T = 2\pi a^{3/2} \sqrt{\frac{m}{\alpha}}$ (unter Ausnutzung von $a = \frac{\alpha}{2|E|}$ bzw. $|E| = \frac{\alpha}{2a}$)

Die Proportionalität von T zu $a^{3/2}$ ist auch als 3. Keplersches Gesetz bekannt.

Kommentare:

① Eine analoge Analyse für $V = +\frac{\alpha}{r}$ liefert stets Hyperbelbahnen:

$$r = \frac{p}{-1 + e\cos\varphi}$$ (nur für $r>0$ phys. relevant)

② Der "Lenz'sche Vektor" $\bar{v} \times \bar{L} - \alpha\bar{r}/r$ ist eine zusätzliche Erhaltungsgröße (→ Übungen). Er kann für eine noch elegantere Analyse des Kepler-Problems benutzt werden.

③ Im System Erde–Mond gilt die Annahme $m_2 \gg m_1$ nicht sehr gut. Obige Analyse beschreibt also wirklich nur die Bewegung der <u>Relativkoordinate</u>. In Wirklichkeit rotieren beide Körper um ihren gemeinsamen Schwerpkt. Die dabei auftretende Zentrifugalkraft führt, in Kombination mit der örtlich variierenden Anziehungskraft des Mondes, zu den "Gezeitenbergen" der Wasseroberfläche: