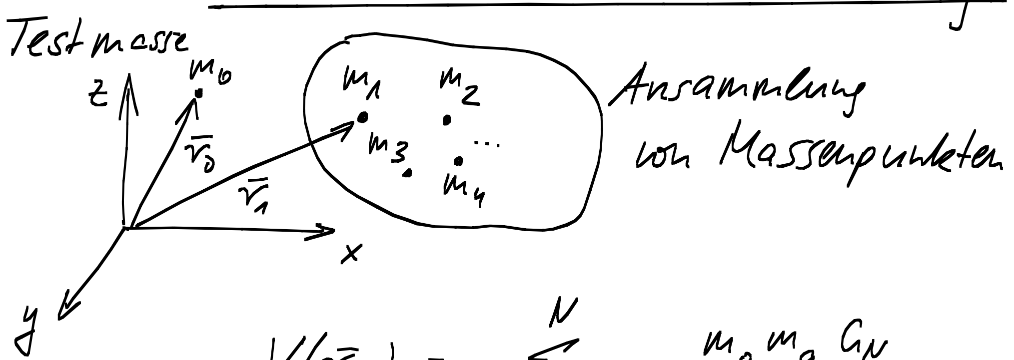
8. Gravitation ausgedehnter Körper

- Punktmassenannahme oft nicht präzise (z.B. für Erde-Mond oder Erde-Satellit)
- Dies ist leicht korrigierbar, da Kräfte (& damit die zugrundeliegenden Potentiale) additiv sind.

  (Achtung: Dies ist nicht mehr korrekt in der ART, da dort Gleichungen für das Gravitationsfeld nichtlinear sind. In der hier relevanten linearen Näherung spielt dies keine Rolle.)

8.1 Potential einer Massenverteilung



$$V(\bar{r}_0) = \sum_{a=1}^{N} - \frac{m_0 m_a G_N}{|\bar{r}_0 - \bar{r}_a|}$$

Übergang zum ausgedehnten Körper → Übergang zur Integration

$$V(\bar{r}_0) = \sum_{a=1}^{N} - \frac{m_0 G_N}{|\bar{r}_0 - \bar{r}_a|} \cdot \rho(\bar{r}_a) \cdot \Delta V_a$$

Zerlegung des Körpers in viele kleine Elemente

$$\downarrow$$

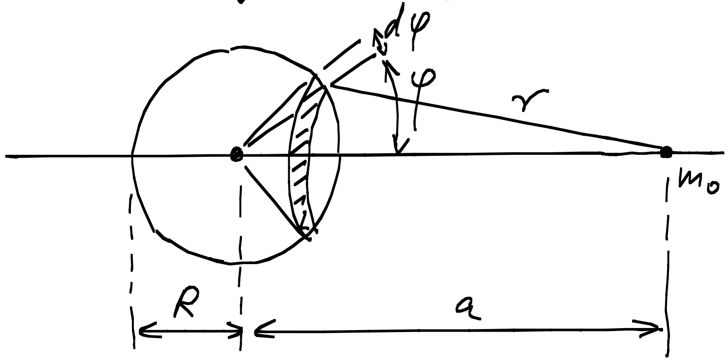
$$V(\bar{r}_0) = - m_0 G_N \int \frac{d^3\bar{r}\, \rho(\bar{r})}{|\bar{r}_0 - \bar{r}|}$$

oder, noch expliziter:

$$V(x_0, y_0, z_0) = -m_0 G_N \int \frac{dx\,dy\,dz\;\rho(x,y,z)}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}}$$

$\uparrow$ Integral über Körpervolumen.

8.2 Gravitationspotential einer Kugelschale



Die Kugelschale sei dünn, mit Flächendichte ρ_F (gemessen in kg/m^2)

Das von dem schraffierten Ring erzeugte Potential ist

$$dV = -mG_N \frac{dM}{r} = -mG_N \frac{\rho_F\, dA}{r} = -\frac{mG_N\rho_F}{r}\cdot \underbrace{(R\,d\varphi)}_{\text{Breite}}\cdot\underbrace{(2\pi R\sin\varphi)}_{\text{Radius}}$$

(des Ringes).

$$r = \sqrt{(a-R\cos\varphi)^2+(R\sin\varphi)^2} = \sqrt{a^2+R^2-2aR\cos\varphi}$$

Einzige Integration: φ von 0 bis π:

$$V = -mG_N\rho_F\cdot 2\pi R^2\cdot\int_0^\pi \frac{d\varphi\,\sin\varphi}{\sqrt{A-B\cos\varphi}} \quad \text{mit} \quad A = a^2+R^2, \quad B = 2aR$$

Ersetzung: $\cos\varphi = x$; $-\sin\varphi\,d\varphi = dx$

$\varphi = 0 \Rightarrow x = 1$; $\varphi = \pi \Rightarrow x = -1$

$$V = -mG_N\rho_F\, 2\pi R^2 \int_{-1}^{1} \frac{-dx}{\sqrt{A-Bx}}$$

$$\int_{-1}^{1} \frac{-dx}{\sqrt{A-Bx}} = -\frac{1}{(-B)}\, 2\cdot\sqrt{A-Bx}\,\Big|_{1}^{-1} = \frac{2}{B}\left(\sqrt{A+Bx}-\sqrt{A-Bx}\right)$$

$$= \frac{2}{2aR}\left(\sqrt{a^2+R^2+2aR}-\sqrt{a^2+R^2-2aR}\right) = \frac{1}{aR}\left((a+R)-(a-R)\right) = \frac{2}{a}$$

$$V = -mG_N\, \varrho_F\, \frac{4\pi R^2}{a} = -mG_N\, \frac{A\varrho_F}{a} = -\frac{G_N m M}{a}$$

Genau so, als sei die Masse im Zentrum konzentriert.

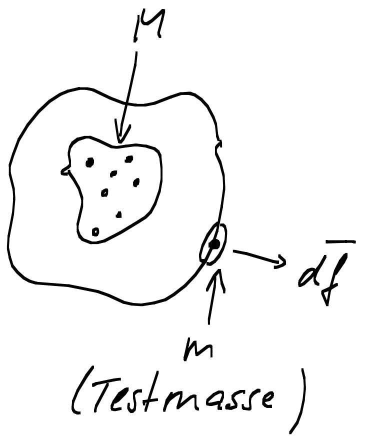
Analoge Rechnung zeigt: Im Inneren dieser Kugelschale gibt es keine gravit. Kraft ($V = \text{const.}$)
→ Übungen

Einfache Konsequenz:

Das Potential eines sphärisch symmetrischen Körpers im Außenraum ist so, als sei die Masse im Zentrum konzentriert. (Homogenität ist nicht erforderlich)

8.3 Gaußscher Satz für Gravitation

Zentrale Behauptung: Sei O eine Oberfläche, welche eine Massenverteilung mit Gesamtmasse M einschließt. Sei $\bar F(\bar x)$ die von dieser Massenverteilung auf eine Testmasse m ausgeübte Kraft. Dann gilt:



$$M = -\frac{1}{4\pi G_N m}\int_O \bar F\cdot d\bar f$$

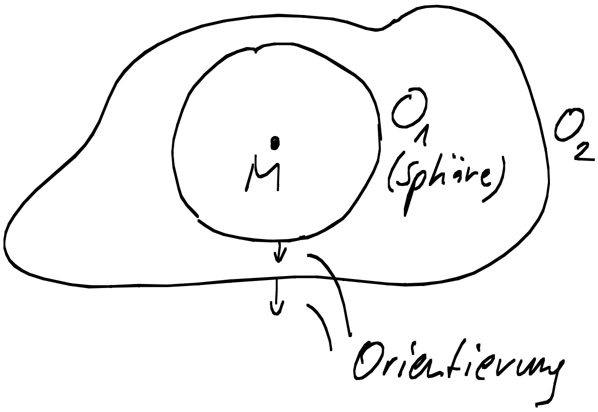
Startpunkt: Punktmasse M am Ursprung. O sei Sphäre mit Radius R und Zentrum am Ursprung.

$$I = \int_O \bar{F} \cdot d\bar{f} = \int_O \left(-\frac{G_N m M}{R^2} \bar{e}_r \right) \cdot \left(|d\bar{f}| \, \bar{e}_r \right) = -\frac{G_N m M}{R^2} \int_O |d\bar{f}|$$

$$= -\frac{G_N m M}{R^2} \cdot 4\pi R^2$$

$$M = -\frac{I}{4\pi m G_N} \quad \Leftarrow$$

Allgemeine Fläche:



$$I_{1,2} \equiv \int_{O_1, O_2} \bar{F} d\bar{f}$$

$$I_2 - I_1 = \int_{O_2} \bar{F} d\bar{f} - \int_{O_1} \bar{F} d\bar{f} = \int_{O_2} \bar{F} d\bar{f} + \int_{\tilde{O}_1} \bar{F} d\bar{f}$$

↑ umgekehrt orientiert

$$I_2 - I_1 = \int_{"O_2 - O_1"} \bar{F} d\bar{f}$$

$\leftarrow$ Oberfläche des "Zwischenraumes" zwischen O_1 und O_2.

nach Gauß: $$I_2 - I_1 = \int_{"Vol_2 - Vol_1"} d(Vol.) \cdot \bar{\nabla} \bar{F} = -\int_{"Vol_2 - Vol_1"} d(Vol.) \, \bar{\nabla}^2 V$$

(Volumen des Zwischenraumes)

$\Rightarrow$ Unsere Eingangsbehauptung folgt für eine allg. M umgebende Fläche, falls $\bar{\nabla}^2 V = 0$ im Zwischenraum.

Letzteres wollen wir jetzt nachprüfen:

<u>Berechnung von $\bar{\nabla}^2 V$</u>

- $V(\bar{r}) = -\frac{m M G_N}{r}$ mit $\bar{r} = (x_1, x_2, x_3)$;

  $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$

- Wir können uns sofort auf $\bar{\nabla}^2(\frac{1}{r})$ konzentrieren:

$$\left(\bar{\nabla}\left(\frac{1}{r}\right)\right)_i = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{\partial}{\partial x_i} \cdot \frac{1}{\sqrt{\sum_j x_j^2}} = -\frac{1}{2} \frac{2x_i}{\sqrt{\sum_j x_j^2}^3} =$$

$$= -\frac{x_i}{r^3} = -\left(\frac{\bar{r}}{r^3}\right)_i$$

$$\bar{\nabla}^2\left(\frac{1}{r}\right) = \bar{\nabla} \cdot \left(\bar{\nabla}\left(\frac{1}{r}\right)\right) = \frac{\partial}{\partial x_i} \cdot \left(\bar{\nabla}\left(\frac{1}{r}\right)\right)_i = \frac{\partial}{\partial x_i} \cdot \left(-\frac{x_i}{\sqrt{\sum_j x_j^2}^3}\right) =$$

$$= -\left\{\frac{3}{\sqrt{\sum_j x_j^2}^3} - \frac{3}{2} \cdot \frac{x_i \cdot 2x_i}{\sqrt{\sum_j x_j^2}^5}\right\} = -\left\{\frac{3r^2}{r^5} - \frac{3r^2}{r^5}\right\} = 0$$

$\Rightarrow$ Also gilt in der Tat $I_1 = I_2$ für 2 beliebige Flächen O_1 und O_2, die eine Punktmasse M am Ursprung umgeben.

- Wegen <u>Translationsinvarianz</u> überträgt sich dies sofort auf Flächen, die eine Punktmasse beliebiger Position umgeben.

  ($\int_O \bar{F} \cdot d\bar{f}$ ändert sich nicht, wenn Fläche <u>und</u> Massenpkt. verschoben werden.)

$\Rightarrow$ $M = -\frac{1}{4\pi m G_N} \int_O \bar{F} \cdot d\bar{f}$ für bel. Fläche O die eine bel. Pkt. masse M umgibt.

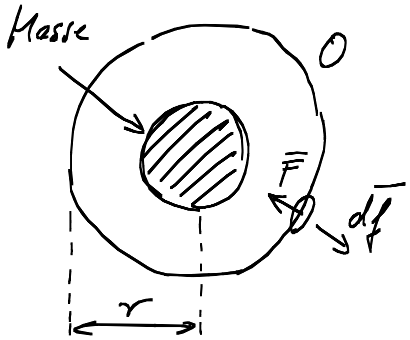
- Wegen <u>Linearität der Beziehung zwischen Masse & Kraft</u> überträgt sich dies weiterhin sofort auf belieb. Massenverteilungen:

$$M_i = -\frac{1}{4\pi m G_N}\int_O \bar{F}_i \cdot d\bar{f}$$

$$M = \sum M_i = -\frac{1}{4\pi m G_N}\int_O \Big(\sum_i \bar{F}_i\Big)\cdot d\bar{f} = -\frac{1}{4\pi m G_N}\int_O \bar{F}\cdot d\bar{f}$$

Damit ist unsere eingangs gemachte Behauptung hergeleitet.

<u>Einfache Anwendung:</u> Kraft einer kugelsymmetrischen Massenverteilung:



- Aus Symmetriegründen ist $|\bar{F}| = \text{const.}$ und $\bar{F} \uparrow\downarrow d\bar{f}$ auf O.
- Aus unserem "Theorem" folgt

$$M = -\frac{1}{4\pi G_N m}\int \bar{F}\cdot d\bar{f} = \frac{1}{4\pi G_N m}\cdot |\bar{F}|\cdot 4\pi r^2$$

$$\Rightarrow |\bar{F}| = \frac{m M G_N}{r^2} \quad ; \quad \bar{F} = -\frac{\bar{r}}{r}\cdot\frac{m M G_N}{r^2} .$$

$\Rightarrow$ Kraft ist exakt wie bei Punktmasse M im Zentrum. (Konsistent mit unserer expliziten Rechnung fürs Potential unter 8.2)

<u>8.4 Feldgleichung für das Gravitationspotential</u>

- Wir wissen: $\int_O \bar{F}\, d\bar{f} = -(4\pi G_N m)\cdot M$

$$\Big\downarrow \text{Gauß}$$

$$\int_{Vol.} (\nabla \bar{F})\cdot d(Vol.) = -(4\pi G_N m)\cdot \int_{Vol.} \rho \; d(Vol.)$$

- Da dies für beliebige (also speziell auch für sehr kleine) Volumina gilt, können wir das Integralzeichen weglassen:

$$\bar{\nabla}\cdot\bar{F} = -4\pi G_N m \rho$$

bzw. $$\bar{\nabla}^2 V = 4\pi G_N m \rho \,.$$

- Es ist oft nützlich, ein von der Testmasse m unabhängiges "Gravitationspotential" ϕ zu definieren: $\phi \equiv \frac{1}{m}\cdot V$.

Für dieses gilt dann: $$\boxed{\bar{\nabla}^2\phi = 4\pi G_N \rho}$$

Laplace-Operator Δ

Poisson'sche (ohne ρ: Laplace'sche) Differentialgleichung

- Man sagt: "ρ ist Quelle für das Gravitationspotential ϕ."

- Bewegung einer Testmasse: $m\ddot{\bar{x}} = \bar{F} = -\bar{\nabla}V \;\Rightarrow\; \ddot{\bar{x}} = -\bar{\nabla}\phi$

(Verallgemeinerung zu "alle Körper fallen gleich schnell".)

- Derartige (partielle) Dgl.-en werden viel ausführlicher in E-Dynamik besprochen.

- $\bar{\nabla}^2\phi = 4\pi G_N\rho$ ist konsistent mit der obigen Aussage $\bar{\nabla}^2 V = 0$ (bzw. $\bar{\nabla}^2\phi = 0$) für Punktmasse. (Natürlich nur für $r \neq 0$, also in einer gewissen Entfernung von der Pkt.masse. Bei $r=0$ ist $\bar{\nabla}^2(\frac{1}{r})$ nicht definiert!)