Etwas formaler:

Gegeben einen Vektorraum V, erhalten wir immer einen affinen Raum, indem wir $A \equiv V$ und $\left\{ \begin{array}{ccc} A \times A & \to & V \\ (\bar{x}, \bar{y}) & \mapsto & \bar{y} - \bar{x} \end{array} \right\}$ setzen.

Wichtig: Der phys. Raum der klass. Mechanik ist der in diesem Sinne zu $\mathbb{R}^3$ gehörige affine Raum – $\mathbb{E}^3$.

($\mathbb{E}^3$ steht für "euklidisch" und impliziert auch die von $\mathbb{R}^3$ kommende Abstandsfunktion:

$$\varrho(P,Q) = \| \vec{PQ} \| = \sqrt{\vec{PQ} \cdot \vec{PQ}}$$

Bei Hinzunahme der Zeit erhalten wir einen 4d affinen Raum A^4. Diese "phys. Raum-Zeit" trägt eine Galileische Struktur:

1) der zugehörige Vektorraum ist $\mathbb{R}^4$
2) eine lin. Abb. $t : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ ordnet jedem "Ereignispaar" P, Q ihren zeitl. Abstand $t(\vec{PQ}) \in \mathbb{R}$ zu.

3) Jedem Paar gleichzeitiger Ereignisse P, Q ($t(P\,Q) = 0$) wird durch die Abstandsfkt.

$$\varrho(P, Q) = \| \overrightarrow{PQ} \| = \sqrt{\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PQ}}$$ ein Abstand zugeordnet

(Dies ist die gewöhnliche Norm auf $\mathbb{R}^3$, da $\overrightarrow{PQ}$ natürlich als Element von $\mathbb{R}^3$ aufgefaßt werden kann, da $\mathrm{Ker}(t) = \mathbb{R}^3$.)

<u>Entscheidend:</u>

- Die Raumzeit der klass. Mechanik ist ein affiner Raum A^4 mit Galileischer Struktur.
- Die Gruppe der Galilei-Transformationen ist die Gruppe aller Transformationen der Raumzeit, die die Galileische Struktur respektieren.

Zur expliziten Angabe der Galilei-Gruppe ist es sinnvoll, den A^4 als $\mathbb{R}^4$ zu parametrisieren:
(oder sogar $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$)

$(t, \bar{x}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$; Zeitfkt: $(t, \bar{x}), (t', \bar{x}') \longmapsto t - t'$

Abstand: $(t, \bar{x}), (t, \bar{x}') \longmapsto \| \bar{x} - \bar{x}' \|$

G (Galileische Gruppe) enthält:

1) Rotationen: $(t,x) \longmapsto (t, Rx)$, $R \in O(3)$

2) Translationen: $(t,x) \longmapsto (t+s, x+y)$, $s \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}^3$

3) Boosts: $(t,x) \longmapsto (t, x+vt)$, $v \in \mathbb{R}^3$.

Jedes $g \in G$ ist schreibbar als $g = g_3 \circ g_2 \circ g_1$.

$$\underset{\text{Boost}}{g_3} \circ \underset{\text{Transl.}}{g_2} \circ \underset{\text{Rot.}}{g_1}$$

(Der Beweis beinhaltet u.a., daß etwa

$$g_2 \circ g_1 \circ g_2' \quad \text{oder} \quad g_2 \circ g_1 \circ g_2' \circ g_1' \quad \text{etc.}$$

stets als

$$g_2'' \circ g_1'',$$

also als Hintereinanderausführung von genau einer Rotation und einer Translation darstellbar sind. Dies folgt (im Wesentlichen) aus Übungsaufg. 6.)

Kommentare:

- die Rotationen waren bereits eine Symmetrie des $\mathbb{R}^3$, bleiben ("natürlich") auch eine Symm. des A^4 mit Galilei-Struktur.
- die Translationen kommen hinzu, da wir die

besondere Rolle der 0 im Vektorraum aufgegeben haben. (Aber: Die oben definierten Zeit- und Abstandsfkt.-en sind unter Translationen invariant!)

- die (Galilei-)Boosts "mischen" den $\mathbb{R}$ und $\mathbb{R}^3$-Teil des $\mathbb{R}^4$-Koordinatensystems (eine noch allgemeinere "Mischung" dieses Typs wird durch die "Lorentz-Boosts" der spez. Rel.th. realisiert).
- die Boosts entsprechen dem Hinzufügen einer konst. Geschwindigkeit:

$$\underline{\text{Trajektorie:}} \quad (t, x(t)) \longmapsto (t, x(t) + v_0 \cdot t)$$

$$v = \dot{x}(t) \quad ; \quad v = \dot{x}(t) + \underline{\underline{v_0}}$$

("Boost" = Zunahme (der Geschwindigkeit))

- Boost respektieren (offensichtlich) die Zeitfkt.:

$$((t,x), (t',x')) \longmapsto t - t'$$

$$((t, x+vt), (t', x'+vt')) \longmapsto t - t'$$

- eine lineare Trf. vom Typ $(t,x) \mapsto (t + cx, x)$ würde dies nicht tun und ist deshalb nicht Teil der Galilei-Gruppe.

- es gibt keine wohldefinierte "Gleichörtlichkeit" bei verschiedenem t:

$$(t,x) \; ; \quad (t',x) \quad - \text{ beide am gleichen Ort}$$

$$\downarrow \text{ Boost}$$

$$(t, x+vt) \; ; \quad (t', x+vt') \quad - \text{ i.A. nicht mehr am gleichen Ort.}$$

Aktive / Passive Beschreibung von Symmetrien

(am Beispiel der Gruppe $O(N)$ als Symmetrie des $\mathbb{R}^N$)

aktiv: Ein System von Vektoren $v, w, \dots \in \mathbb{R}^N$ (bzw. ein physikalisches System, dass durch einen solchen Satz von Vektoren beschrieben wird) geht über in

$$R\cdot v,\; R\cdot w, \;\dots \in \mathbb{R}^N$$

mit $R \in O(N)$

passiv: Das phys. System $v, w, \dots \in \mathbb{R}^N$ ist fix. Es wird in der Basis

$$e^1 = (1, 0, \cdots, 0)$$
$$e^2 = (0, 1, \cdots, 0)$$
$$\vdots$$
$$e^N = (0, 0, \cdots, 1)$$

beschrieben durch die Komponenten

$$\{v^i\},\; \{w^i\},\; \dots$$

mit $v = \sum_i v^i e^i$, $w = \sum_i w^i e^i$, ...

Man rotiere die Basis: $e'^1 = R \cdot e^1$

$\vdots$

$e'^N = R \cdot e^N$.

In der neuen Basis ist das phys. System durch die Komponenten $\{v^\alpha\}$, $\{w^\beta\}$, ... beschrieben:

$$v = \sum_\alpha v^\alpha e'^\alpha, \quad w = \sum_\alpha w^\alpha e'^\alpha, \ldots$$

Man findet nun

$$v = v^\alpha e'^\alpha = v^\alpha (R e^\alpha)$$

$$v^i = e^i \cdot v = v^\alpha (e^i R e^\alpha) = v^\alpha R^{i\alpha}$$

$$v^i = R^{i\alpha} v^\alpha$$

$$\Downarrow$$

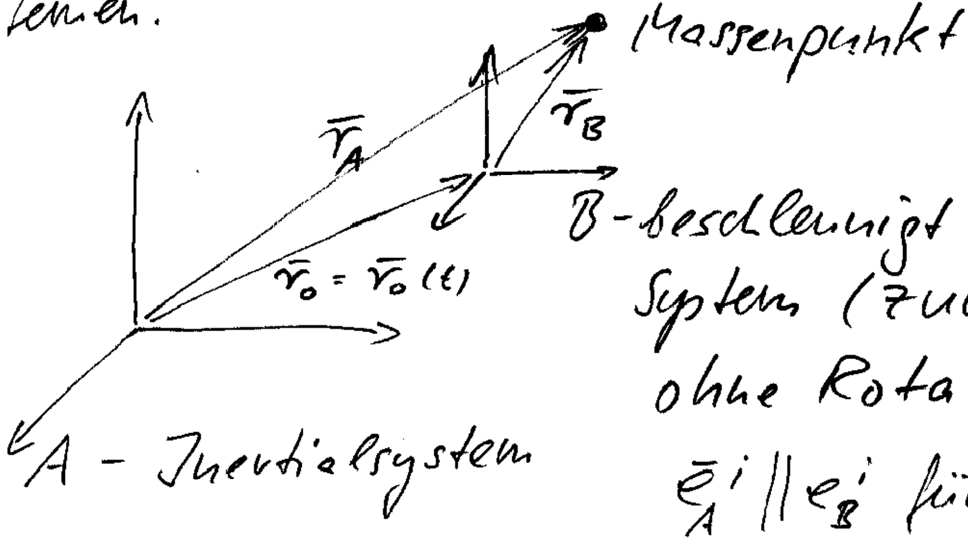
$$\underline{\underline{v^\alpha = (R^{-1})^{\alpha i} v^i}}$$

Die Beschreibung der Symmetrie ist also sehr ähnlich (aber nicht identisch).

(Wir haben in der bisherigen Diskussion immer den aktiven Standpunkt benutzt.)

4 Scheinkräfte

treten auf bei Beschreibung der Physik in beschleunigten (also nicht-Inertial-) Systemen.



B - beschleunigt bewegtes System (zunächst noch ohne Rotation, also $\bar{e}_A^i \parallel e_B^i$ für $i = 1,2,3$)

Der Massenpkt. unterliege keinen echten Kräften, also $\ddot{\bar{r}}_A = 0$. Wegen $\bar{r}_A = \bar{r}_0 + \bar{r}_B$ folgt

$$\ddot{\bar{r}}_B = -\ddot{\bar{r}}_0 ,$$

was geschrieben werden kann als

$$m\ddot{\bar{r}}_B = \bar{F}_s \quad \text{mit} \quad \underline{\underline{\bar{F}_s \equiv -m\ddot{\bar{r}}_0}}$$

"Scheinkraft".

Bsp.: In einem mit $a_0 = \ddot{r}_0$ beschleunigten Auto bewegt sich ein freier Massepkt. relativ zum Auto unter Wirkung der Scheinkraft $F_s = -ma_0$.

Damit der Massepkt. relativ zum Auto ruht, muß eine echte Kraft angreifen:

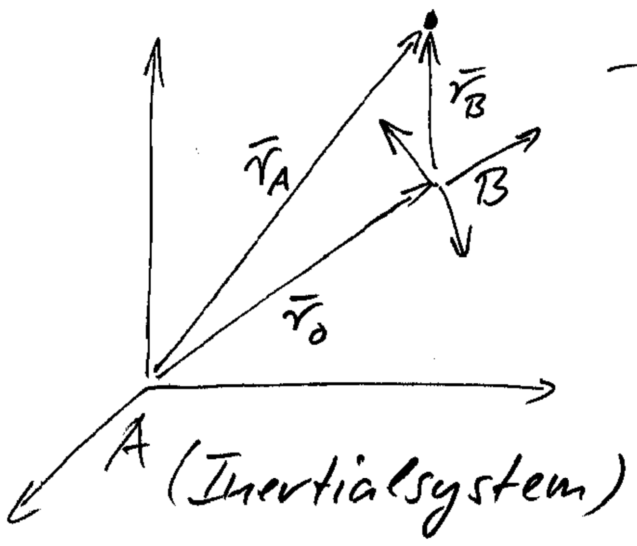
$$m\ddot{\bar r}_B = F_s + F = 0$$

Pkt. ruht rel. zum Auto.

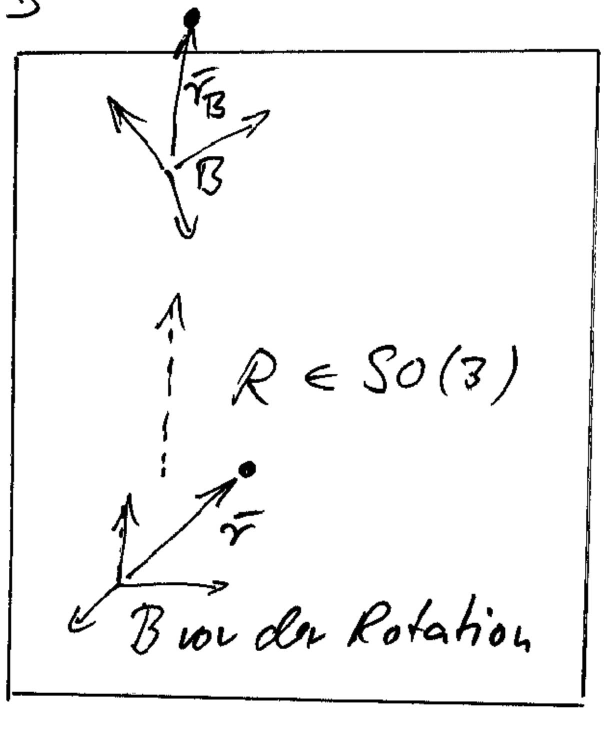
F ist z. B. die Kraft der Rückenlehne auf eine Person beim Anfahren.

<u>interessanterer Fall:</u> B soll zusätzlich rotieren.

(Dies ist auch bei $\ddot{\bar r}_0$ eine beschleun. Bewegung und B damit kein Inertialsystem.)



Die auf die Ausgangslage bezogene Rotation von B:



- B geht aus A durch Verschiebung um $\bar{r}_0$ und Rotation um R hervor. ($e_B^i = R e_A^i$, $i = 1,2,3$)
- Für allgemeines $\bar{r}_0(t)$ und $R(t)$ ist dies ausreichend, um eine völlig allgemeine Bewegung von B zu beschreiben.
- Bei freier Bewegung gilt, wie oben $\ddot{\bar{r}}_A = 0$.
  Ziel ist es, $\ddot{\bar{r}}_A = (\bar{r}_0 + R\bar{r})^{\cdot\cdot}$ auszurechnen (sprich: in eine nützliche Form umzuschreiben, so daß $\ddot{\bar{r}}$ bestimmt werden kann.)

$$(Rr)^{\cdot\cdot} = \ddot{R}r + 2\dot{R}\dot{r} + R\ddot{r}$$

<u>Berechnung von $\dot{R}$:</u>

Definiere $R_{\delta t}$ als die (infinitesimale) Rotation von der Position bei t in die Position bei $t+dt$:

$$R(t+\delta t) = R_{\delta t} \cdot R(t)$$

$$R_{\delta t} = \mathbb{1} + \delta t \cdot T + O(\delta t^2)$$

$$R_{\delta t} R_{\delta t}^T = \mathbb{1} \quad \Rightarrow \quad \mathbb{1} + \delta t (T + T^T) + O(\delta t^2) = \mathbb{1}$$

$$\Rightarrow \quad T + T^T = 0 \quad (T\text{-antisymm.})$$

<u>allgemeinste Form:</u> $\quad T = -\underset{\sim}{\omega}^i T^i$

mit $T^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad T^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(Basis)

bequeme Schreibweise: $\quad (T^i)^{jk} = \varepsilon^{ijk}$

Man macht sich leicht klar, daß $\underset{\sim}{\omega}$ die Rotationsachse der infinit. Rotation $R_{\delta t}$ festlegt. Wähle z.B. $\quad \underset{\sim}{\omega} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} |\underset{\sim}{\omega}|$

$$\Rightarrow R_{\delta t} = \mathbb{1} + |\underset{\sim}{\omega}| \delta t \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + O(\delta t^2)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \quad \text{mit } \varphi = |\underset{\sim}{\omega}| \cdot \delta t$$

$|\underset{\sim}{\omega}|$ ist die "Winkelgeschwindigkeit"

$$\dot{R} = \frac{R(t+\delta t) - R(t)}{\delta t} = \frac{R_{\delta t} - \mathbb{1}}{\delta t} \cdot R(t)$$

$$(\dot{R})^{ij} = -\underset{\sim}{\omega}^k \varepsilon^{kil} R^{lj}$$

- $\underset{\sim}{\omega}$ ist die in A definierte Drehachse.
- sinnvoller und intuitiver: die durch $\underset{\sim}{\omega} = R\omega$ definierte Drehachse im System B.

$$(\dot{R})^{ij} = - R^{km} \omega^m \varepsilon^{kil} R^{lj}$$

$$= -\omega^m \underbrace{\varepsilon^{kpl} R^{km} R^{pn} R^{lj}}_{\varepsilon^{mnj}} \cdot \underbrace{(R^{-1})^{ni}}_{R^{in}}$$

$$= -\omega^m \varepsilon^{mnj} R^{in} = R^{in} \varepsilon^{nmj} \omega^m$$

$$(\dot{R}v)^i = \dot{R}^{ij} v^j = R^{in} \varepsilon^{nmj} \omega^m v^j$$

$$\underline{\dot{R}v = R(\omega \times v)}$$

Dies ist ein wichtiges (und intuitives) Zwischenergebnis.

$$(Rr)^{\cdot\cdot} = [R\dot r + \dot R r]^{\cdot} = [R\dot r + R(\omega\times r)]^{\cdot}$$

$$= R\ddot r + \dot R\dot r + \dot R(\omega\times r) + R(\dot\omega\times r) + R(\omega\times\dot r)$$

$$= R[\ddot r + \omega\times\dot r + \omega\times(\omega\times r) + \dot\omega\times r + \omega\times\dot r]$$

$$= R[\ddot r + \omega\times(\omega\times r) + 2\omega\times\dot r + \dot\omega\times r]$$

Man benutze dies nun in

$$F = m\ddot r_A$$

$$F = m(\ddot r_0 + (Rr)^{\cdot\cdot})$$

$$\Rightarrow m\ddot r = R^{-1}F \underbrace{- m[R^{-1}\ddot r_0 + \underbrace{\omega\times(\omega\times r)}_{\text{Zentrifugal}} + \underbrace{2\omega\times\dot r}_{\text{Coriolis}} + \dot\omega\times r]}_{\equiv F_s}$$

zum besseren Verständnis:

$$[\omega\times(\omega\times r)]_i = \varepsilon_{ijk}\,\omega_j\,\varepsilon_{klm}\,\omega_l\, r_m =$$

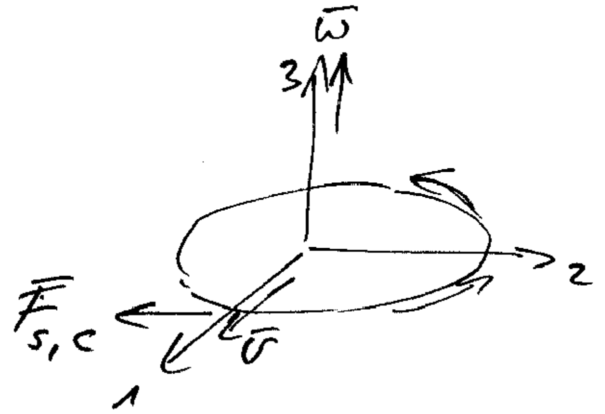
$$= [\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}]\,\omega_j\,\omega_l\, r_m = \omega_i(r\cdot\omega) - r_i(\omega^2)$$

Für $r \perp \omega$ findet man nun

$$\bar{F}_{s,\,\text{zentrif.}} = (m\omega^2)\cdot\bar{r}.$$

Für $\dot{r} \perp \omega$ (etwa $\omega \parallel e_3$; $\dot{r} \parallel e_1$)
folgt

$$\bar{F}_{s,\,\text{Coriolis}} = -\bar{e}_2 \cdot 2|\omega||v|$$



<u>Viele berühmte phys. Beispiele:</u>

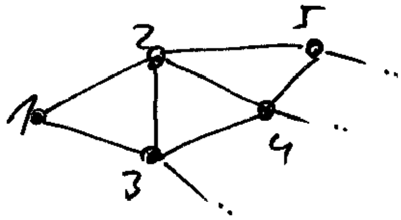
- Drehrichtung im Abfluß
- (global) vorherrschende Windrichtung Nord/Südhalbkugel versch.
- unterschiedl. Abnutzung der Gleise, der beiden Flußufer etc.

usw.

5) Zwangsbedingungen, d'Alembertsches Prinzip, Lagrangesche Gl.-en 1. Art

Beispiele für Zwangsbedingungen:

- Teilchen (Gasmolekül) im Kasten (*)
- Perle auf Draht (Draht bewegt oder nicht bewegt)
- senkrecht stehendes Rad auf Oberfläche (*) (ohne Rutschen)
- starrer Körper



für einen starren Körper haben wir stets:

$$|\bar{x}_i - \bar{x}_j|^2 - c_{ij}^2 = 0.$$

allgemeiner (aber noch nicht allgemein genug):

$$\Phi(\bar{x}_1, \cdots, \bar{x}_n, t) = 0$$

$\uparrow$ <u>rheonom</u>

(falls t nicht vorkommt, wie oben, : <u>skleronom</u>)

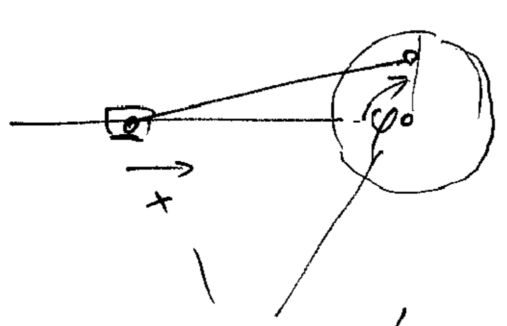
- Bei Möglichkeit einer geschlossenen Angabe der Zwangsbedingung als

$$\Phi(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n, t) = 0 \quad \text{(mit od. ohne } t\text{-Abhäng.)}$$

heißt sie holonom. (Im Gegensatz zu den Beispielen mit (*) oben.)

- ein System mit n Teilchen und d Zwangsbedingungen hat nur $3n-d$ Freiheitsgrade der Bewegung. Wir können die $(x_a)^i$ Parameter durchnumerieren $(x_a)^i \to q^i \quad (i = 1..3n)$ und die letzten d eliminieren: $\to q^i \, (i = 1 \dots 3n-d)$.

- die q^i müssen nicht mit den ersten Komponenten der Kartes. Koord. identisch sein. (Wir können auch Winkel, Entfernungen auf einer gekrümmten Schiene etc. verwenden:



x od. φ können wahlweise benutzt werden.

- $\Rightarrow$ Wir können also mech. Systeme durch <u>verallgemeinerte Koordinaten q^i</u> beschreiben.

- diese können dann im Prinzip noch weiteren Zwangsbedingungen unterworfen sein

$$\phi(q_1 \cdots q_k) = 0,$$

die wir im Prinzip auch lösen könnten.

- <u>Aber</u>: Es gibt auch die Möglichkeit zusätzlicher Zwangsbedingungen

$$\sum_{i=1}^{k} f_i(q_1 \cdots q_k)\, dq_i = 0,$$

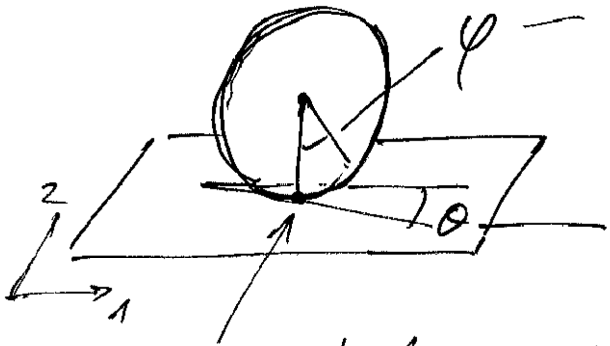
die nicht integrierbar (holos (griech.) → integer (lat.) → ganz, integrabel), also <u>"nicht-holonom"</u> sind:

$$\nexists\ \Phi(q_1 \cdots q_k) \text{ so daß } f_i = \frac{\partial \Phi}{\partial q_i}$$

für alle $i = 1 \dots k$.

(Vgl. "auf der Ebene rollendes Rad" ganz am Anfang.)

Das rollende Rad als Bsp. nichtholonomer Zwangsbedingungen:



<u>Zwangsbedingungen:</u>
$$dx^1 = R\,d\varphi \cdot \cos\theta$$
$$dx^2 = R\,d\varphi \cdot (-\sin\theta)$$

Wenn diese Bedingungen (oder wenigstens eine davon integrierbar wären, also aus

$$\Phi(x^1, x^2, \theta, \varphi) = 0$$

folgen würden, dann könnte man z.B.

$$\varphi = \varphi(x^1, x^2, \theta)$$

bestimmen. Dies ist aber offensichtlich unmöglich, da man das Rad auf einem größeren oder kleineren Kreis an den gleichen Pkt. der Ebene zurückrollen kann und dann wieder beim gleichen x^1, x^2, θ aber verschiedenen φ's ist.

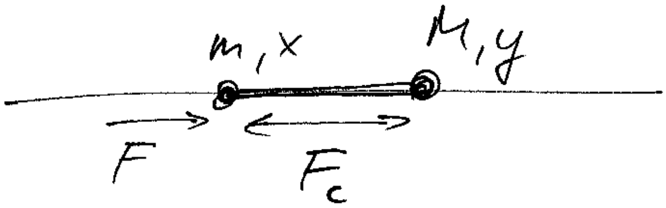
Also: • am wichtigsten sind <u>holonome</u> Zwangsbed.

• auch interessant: in <u>differentieller Form</u> gegebene <u>nicht holonome</u> Zwangsbed.

• hier weniger wichtig: andere nicht-holonome Zwangsbed-en (etwa Wände eines Kolbens mit Gas, etc.)

<u>prinzipielle Bemerkung</u>: Wir können durchaus mit den Newtonschen Axiomen auskommen und <u>müssen</u> keine neuen Methoden einführen:

<u>Bsp.</u>: 1-dim. Bewegung zweier starr verbundener Punkte:



$$m\ddot{x} = F - F_c$$
$$M\ddot{y} = F_c$$

$$x - y = \text{const}$$

↑ Zwangskräfte mit denen m & M gegenseitig auf sich wirken.

leicht zu lösen!

$(\ddot{x} - \ddot{y} = 0 \Rightarrow \frac{1}{m}(F - F_c) - \frac{1}{M} F_c = 0 \Rightarrow F_c$ bekannt, der Rest ist standard.)

Obgleich prinzipiell auch Systeme mit Zwangsbedingungen nur auf Grundlage der Newtonschen Axiome behandelbar sind, ist es sinnvoll <u>spezielle technische Vorgehensweisen</u> zu formalisieren:

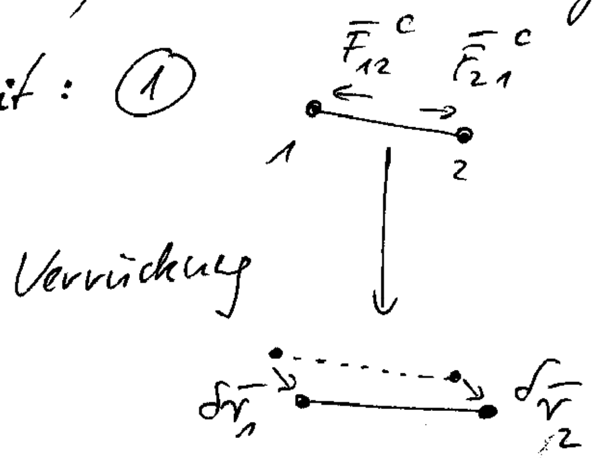
<u>wichtige Schritte dazu:</u>

- Prinzip d. virtuellen Arbeit
- d'Alembertsches Prinzip
- Lagrangesche Gl.-en 1. & 2. Art

<u>Prinzip der virtuellen Arbeit:</u>

(auch der virt. "Verrückung" od. "Verschiebung")

- in vielen Systemen (speziell im starren Körper) verrichten Zwangskräfte keine Arbeit: (1)



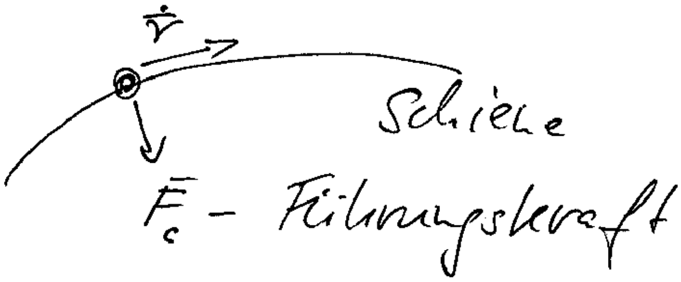
$$\vec{F}_{12}^{\,c} = -\vec{F}_{21}^{\,c}$$

$$\delta A = \bar{F}_{12}^{c} \cdot \delta \bar{r}_1 + \bar{F}_{21}^{c} \cdot \delta \bar{r}_2 = \bar{F}_{12}^{c} \cdot (\delta \bar{r}_1 - \delta \bar{r}_2)$$

$$\delta |\bar{r}_1 - \bar{r}_2|^2 = 0 \Rightarrow (\bar{r}_1 - \bar{r}_2) \cdot (\delta \bar{r}_1 - \delta \bar{r}_2) = 0$$

$$\bar{F}_{12}^{c} \parallel \bar{r}_1 - \bar{r}_2 \Rightarrow \delta A = 0$$

(2) Führung auf Schiene



$$\bar{F}_c \perp \dot{\bar{r}} \Rightarrow \bar{F}_c \perp \delta \bar{r} \Rightarrow \delta A = 0$$

- Man kann die Bedingung

$$\boxed{\sum_i \bar{F}_i^{c} \cdot \delta \bar{r}_i = 0}$$

zur <u>Definition</u> eines "glatt geführten Systems" machen.

- Im Gleichgewicht gilt

$\bar{F}_i^{tot} = 0$ für jedes i (jeden Massenpkt.) eines Systems.