6.3 Prinzip der kleinsten (extremalen) Wirkung

(Man hätte die Vorlesung auch hier starten können! vgl. Landau/Lifschitz Bd. I)

auch genannt: Hamiltonsches Prinzip

- allgemeinste Formulierung des Bewegungsgesetzes mechanischer Systeme (und darüber hinaus!)

Für jedes mech. System $\exists$ Fkt.

$$L(q_1 \cdots q_s, \dot{q}_1 \cdots \dot{q}_s, t)$$

(kurz: $L(q, \dot{q}, t)$)

so daß gilt:

Das System sei bei $t = t_1$ in der Lage $q^{(1)}$
bei $t = t_2$ in der Lage $q^{(2)}$.

Die Bewegung zwischen den beiden Lagen läuft so ab, daß

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t)\, dt \quad (\text{mit } q(t_1) = q^{(1)} \text{ \& } q(t_2) = q^{(2)})$$

minimal wird. (Achtung: dies gilt nur für kleine Bahnabschnitte. Insgesamt kann es sein, daß S nur extremal wird.

Die enorme Bedeutung dieses Prinzips beruht auf der Allgemeinheit (auch in Feldtheorie, Allg. & spez. Rel.theorie, Stringtheorie) und darauf, daß $\underline{\underline{S}}$ für die <u>Quantisierung</u> der mechanischen (und auch der oben erwähnten allgemeineren) Systeme entscheidend ist:

<u>Ausblick auf QM:</u>

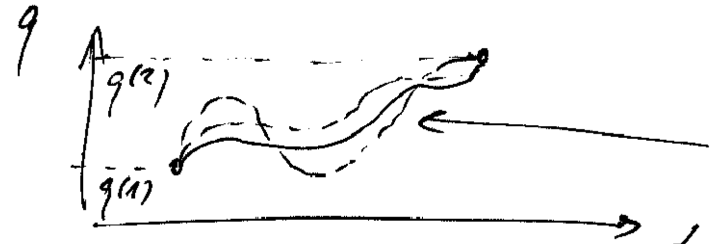
Die Wahrscheinlichkeit für den Übergang eines Teilchens (Systems) von $(t_1, q^{(1)})$ nach $(t_2, q^{(2)})$ ist

$$W \sim |A|^2$$

← Amplitude ($\in \mathbb{C}$).

$$A \sim \underbrace{\int Dq}\, e^{iS}$$

Summe über alle möglichen Wege von $q^{(1)}$ bei t_1 nach $q^{(2)}$ bei t_2:



← verschiedene Fkt.-en $q(t)$

Jetzt noch einmal zu einer etwas vereinfachten ("Physiker-") Herleitung der Bewegungsgleichungen:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \delta L(q, \dot{q}, t)\, dt =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L(\dots)}{\partial q} \cdot \delta q + \frac{\partial L(\dots)}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \right) dt$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{d}{dt} (\delta q) \right) dt$$

partielle Int. (keine Randterme, da $\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$)

$$= \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q} \delta q - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta q \right) dt$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} dt \underbrace{\left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right)}_{\text{muß identisch Null sein.}} \underbrace{\delta q}_{\text{beliebig!}} \overset{!}{=} 0$$

<u>Achtung:</u> L ist nur "bis auf eine totale Zeitableitung" definiert:

$$L' = L + \frac{d}{dt} f(q,t)$$

$$S' = S + \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{d}{dt} f(q,t)$$

$$= S + f(q^{(2)}, t_2) - f(q^{(1)}, t_1)$$

$$\delta S' = \delta S$$

$\Rightarrow$ S & S' sind vom Standpunkt des Wirkungsprinzips gleichwertig.

7. Symmetrien & Erhaltungssätze

7.1 Energieerhaltung

Homogenität der Zeit ; Zeittranslationsinvarianz

$\Rightarrow$ L hängt nicht von t ab (nicht explizit von t ab)

$\Rightarrow$ Der allg. Ausdruck

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial t}$$

wird ersetzt durch

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i$$

mit $\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)$ folgt

$$\frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{d}{dt}(\dot{q}_i) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i\right)$$

bzw. $\frac{d}{dt}E = 0$ mit $E \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i - L$.

Dies entspricht der üblichen Def. $E = T + V$,

da i. A. $T = \frac{1}{2}\sum_{ij} f_{ij}(q)\,\dot{q}_i\,\dot{q}_j$

("quadratische Fkt. der verallg. Geschwindigkeiten")

und damit

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i = \left(\sum_j f_{ij}(q)\,\dot{q}_j\right)\dot{q}_i = 2T$$

und also

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i - L = 2T - (T - V) = \underline{\underline{T + V}} .$$

7.2 Impulserhaltung

Translationsinvarianz (in kartes. Koord. $\bar{x}_i$)

$$\bar{x}_i(t) \longrightarrow \bar{x}_i'(t) = \bar{x}_i(t) + \bar{\varepsilon} = \bar{x}_i(t) + \delta\bar{x}$$

Der Lagrangian sei so beschaffen, daß er sich dabei nicht ändert, also

$$0 = \delta L = \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \bar{x}_i}\delta\bar{x}_i}_{} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\bar{x}}_i}\delta\dot{\bar{x}}_i$$

$$\left(\text{ausführlich: } \sum_{i=1}^{N}\sum_{a=1}^{3}\frac{\partial L}{\partial x_i^a}\delta x_i^a\right)$$

$$\delta\dot{\bar{x}}_i = 0 \quad , \quad \delta\bar{x}_i = \delta\bar{x} = \bar{\varepsilon} = \text{const.}$$

$$\Rightarrow \sum_i \frac{\partial L}{\partial \bar{x}_i} = 0 \overset{\text{Lagr. Gl.}}{\Rightarrow} \frac{d}{dt}\left(\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{\bar{x}}_i}\right) = 0$$

$$\bar{P} = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{\bar{x}}_i} \quad \text{ist erhalten}$$

$$\left(\bar{P} = \sum_i \bar{P}_i \ , \quad \bar{P}_i^a = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i^a} = m_i \dot{x}_i^a\right)$$

keine Summe über i!

Erhaltung des verallg. Impulses

- Sei $L = L(q_1 \cdots q_s, \dot{q}_1 \cdots \dot{q}_s, t)$ und hänge nicht wirklich von q_1 ab, also $L = L(q_2 \cdots q_s, \dot{q}_1 \cdots \dot{q}_s, t)$.
  Dann ist $q_1 \to q_1 + \varepsilon$ eine Symmetrie.

$$0 = \delta L = \frac{\partial L}{\partial q_1} \cdot \varepsilon \quad ; \quad \frac{\partial L}{\partial q_1} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}\right) = 0 \quad , \quad p_1 \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} \text{ ist erhalten.}$$

verallg. Impuls

$\boxed{q_1 \text{ heißt "zyklische" Koordinate}}$

- etwas allgemeiner: $q_m \to q_m + \varepsilon$ mit $m = 1 \cdots r < s$
  sei eine Symmetrie (für alle m gleichzeitig!)

$$\Rightarrow \delta L = \sum_{m=1}^{r} \frac{\partial L}{\partial q_m} \cdot \varepsilon = 0 \quad , \quad \sum_{m=1}^{r} \frac{\partial L}{\partial q_m} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{m=1}^{r} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m}\right) = 0 \Rightarrow \underbrace{\sum_{m=1}^{r} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m}}_{} \text{ erhalten}$$

falls die q_m $(m = 1 \cdots r)$ gerade die x- (oder y-, oder z-) Kompon. der Kartes. Koord. eines Satzes von Teilchen sind, folgt "normale" Impulserhaltung.

7.3 Drehimpulserhaltung

Rotationsinvarianz:

$$\bar{x}_i(t) \longrightarrow \bar{x}_i'(t) = R \cdot \bar{x}(t)$$

infinitesimale Rotations-matrix

$$\mathbb{1} - \delta\varphi^i T^i, \quad (T^i)^{jk} = \varepsilon^{ijk}$$

(vgl. Coriolis-Kraft-Herleitung)

$$\bar{x}_i'(t) = \bar{x}_i(t) + \delta\bar{\varphi} \times \bar{x}(t)$$

$$\delta\bar{x} = \delta\bar{\varphi} \times \bar{x}$$

$$0 = \delta L = \frac{\partial L}{\partial \bar{x}_i}\,\delta\bar{x}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{\bar{x}}_i}\,\delta\dot{\bar{x}}_i$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\bar{x}}_i}\right)\delta\bar{x}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{\bar{x}}_i}\frac{d}{dt}(\delta\bar{x}_i)$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\bar{x}}_i}\cdot\delta\bar{x}_i\right) = \frac{d}{dt}\left(\bar{p}_i\cdot(\delta\bar{\varphi}\times\bar{x}_i)\right)$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\delta\bar{\varphi}\cdot(\bar{x}_i\times\bar{p}_i)\right) = \delta\bar{\varphi}\cdot\frac{d}{dt}(\bar{x}_i\times\bar{p}_i)$$

$$\frac{d}{dt}\bar{L} = 0 \quad \text{mit} \quad \bar{L} = \bar{x}_i \times \bar{p}_i \quad \text{(Drehimpuls)}$$

(Summe über i!)

7.4 Noether-Theorem

Sei ganz allgemein die Wirkung invariant unter folgender Transformation: (q steht symbolisch für $q_1, \dots, q_s$)

$$t \longrightarrow t'(t) = t + \delta t(t)$$

$$q(t) \longrightarrow q'(t') = q(t) + \delta q(t)$$

$$\Big(\text{auch: } q'(t) = q(t) + \bar{\delta} q(t)\Big)$$

$\uparrow$ Definition von $\bar{\delta} q$

$$0 \stackrel{!}{=} \delta S = \int_{t_1'}^{t_2'} L(q'(t'), \dot{q}'(t'), t')\, dt' - \int_{t_1}^{t_2} L(q(t), \dot{q}(t), t)\, dt$$

<u>erster Summand:</u>

$$\dots = \int_{t_1'}^{t_2'} dt\, L(q'(t), \dot{q}'(t), t)$$

$$= \left(\int_{t_1'}^{t_1} + \int_{t_1}^{t_2} + \int_{t_2}^{t_2'} \right) dt\, L(q'(t), \dot{q}'(t), t)$$

$$= \delta t(t_2) L(\dots t_2 \dots) - \delta t(t_1) L(\dots t_1 \dots) + \int_{t_1}^{t_2} dt\, L(q'(t) \dots)$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{d}{dt}\Big(L(q(t),\dot q(t),t)\,\delta t\Big) + L(q'(t),\dot q'(t),t)\right]dt$$

also insgesamt:

$$0 = \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\frac{d}{dt}(L\,\delta t) + \underbrace{\frac{\partial L}{\partial q}\,\bar\delta q}_{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q}\right)\bar\delta q} + \frac{\partial L}{\partial \dot q}\,\bar\delta \dot q\right]$$

$$\underbrace{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q}\right)\bar\delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot q}\,\bar\delta \dot q}_{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q}\,\bar\delta q\right)}$$

Da das Intervall (t_1, t_2) beliebig ist, muß der Integrand an jedem Pkt. verschwinden, also:

$$\frac{d}{dt}\Big[\underbrace{L\,\delta t + \frac{\partial L}{\partial \dot q}\,\bar\delta q}_{\text{Erhaltungsgröße}}\Big] = 0$$

<u>Bsp:</u> $t \to t' + \varepsilon$ (wie bei Energieerhaltung oben)

$q(t) \to q'(t') = q(t)$

$$q'(t') = q'(t) + \dot q(t)\,\delta t$$

$$\Rightarrow \bar\delta q = q'(t) - q(t) = -\dot q\,\delta t = -\dot q\,\varepsilon$$

Damit folgt

$$L\,\delta t + \frac{\partial L}{\partial \dot q}\bar\delta q = L\varepsilon - \frac{\partial L}{\partial \dot q}\dot q\,\varepsilon = -\varepsilon\underbrace{\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q}\dot q - L\right)}_{E}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}E = 0$$, wie erwartet.

Die analoge Anwendung auf Impuls und Drehimpuls (also auf Translations- u. Rotationssymmetrie) bleiben den Hörer überlassen.

<u>Eine etwas andere nützliche Form des Noether-Theorems:</u>

$$\delta t = \varepsilon \cdot T(t)$$

$$\delta q = \varepsilon \cdot Q(t)$$

$$\bar\delta q = \varepsilon\left(Q(t) - \dot q\,T(t)\right)$$

ε – infinit. Transformationsparameter

T, Q – gewisse Funktionen

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\Bigg[\underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\left(Q_i(t) - \dot{q}_i T(t)\right) - L \cdot T(t)}_{\text{Erhaltungsgröße}}\Bigg] = 0$$

<u>Also:</u> (Theorem)

Jeder kontinuierlichen Symmetrie der Wirkung entspricht eine Erhaltungsgröße.

<u>speziell:</u>

$$\left.\begin{array}{l}\text{Zeittransl.} \\ \text{Translation} \\ \text{Rotation}\end{array}\right\} \text{aus Galilei-Gruppe} \quad \begin{array}{l}\rightarrow \text{Energie} \\ \rightarrow \text{Impuls} \\ \rightarrow \text{Drehimpuls}\end{array}$$

Das Noether-Theorem wird in Feldtheorie (E-Dynamik) & QFT von noch viel größerer Bedeutung sein!

7.5 Mechanische Ähnlichkeit

Eine Fkt. von n Variablen heißt homogen vom Grad k falls

$$f(\alpha x_1, \dots, \alpha x_n) = \alpha^k f(x_1 \dots x_n)$$

Bsp:

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = x^2 \\ f(x,y) = (x+y)^2 + y^2 + 3xy \end{array}\right\} k = 2$$

$$f(x,y,z) = \frac{x}{y \cdot z} \quad \Big\} \; k = -1$$

$$T = \sum_{ij} \frac{1}{2} f_{ij}(q)\, \dot{q}_i \dot{q}_j \quad \Big\} \; k = 2 \text{ bzgl. der Variablen } \dot{q}_1 \cdots \dot{q}_s$$

Wichtiger Satz: (Euler)

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot x_i = k \cdot f$$

$$\left[\quad \frac{\partial f(\alpha x_1 \cdots \alpha x_n)}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\alpha^k f(x_1 \cdots x_n)\right)\Big|_{\alpha = 1} \right.$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot x_i = k \cdot f \quad \right]$$

Anwendung: (siehe oben) $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i = 2T$

- Betrachte ein mech. System mit $\mathcal{L} = T - V$

$$T = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{2} \dot{\bar{x}}_i^2 \quad ; \quad V = V(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_N)$$

- zur Notationsvereinfachung: $\bar{x}_1 \ldots \bar{x}_N \to x$
- sei V homogen vom Grad k
- betrachte gewisse durch x & t charakterisierte Bewegung

$\downarrow$

- gehe über zu neuer "Bewegung" mit $\begin{matrix} x & t \\ \downarrow & \downarrow \\ \alpha x & \beta t \end{matrix}$

<u>also:</u>

$$\begin{matrix} x \to \alpha x = x' \\ t \to \beta t = t' \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} T \to \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 T \\ V \to \alpha^k V \end{matrix}$$

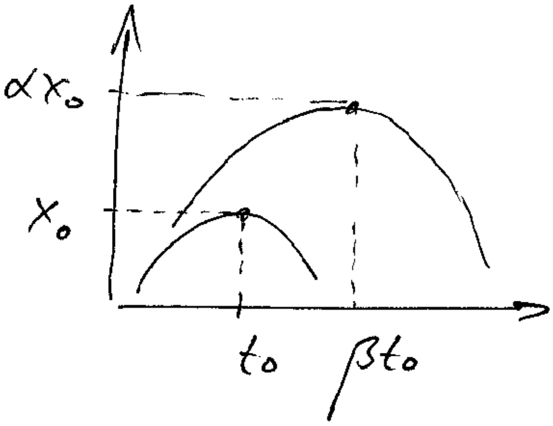
falls $\underline{\underline{\alpha^k = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2}}$ folgt $\mathcal{L} \to \alpha^k \mathcal{L}$

$\Downarrow$

Bewegungsgleichungen werden nur durch konst. Faktor multipliziert;

die durch x', t' beschriebene neue "Bewegung" ist wirklich wieder eine Bewegung im Sinne der Lagr.-Gl.-en.

Zur Veranschaulichung:



alte Bewegung: $x(t)$

neue Bewegung: $\alpha x(t/\beta)$

Wenn $x(t)$ ein Maximum bei t_0 mit Höhe x_0 hat, dann hat $\alpha x(t/\beta)$ ein Max. bei βt_0 mit Höhe αx_0.

Relevante Frage: Gegeben das Verhältnis der charakterist. Längen zweier Bewegungen (x'/x), wie lautet das Verhältnis der entsprechenden charakt. Zeiten? $(x' = \alpha x,\ t' = \beta t)$

$$\frac{t'}{t} = \beta \underset{\uparrow}{=} \alpha^{1-k/2} = \left(\frac{x'}{x}\right)^{1-k/2}$$

wegen $\alpha^k = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2$

$$\boxed{\frac{t'}{t} = \left(\frac{x'}{x}\right)^{1-k/2}}$$ hat viele nützliche Anwendungen!

1) <u>harmonischer Oszill.</u>: $V \sim x^2$, $k=2$

$$t'/t = 1 \quad (\text{unabh. von } x'/x)$$

$\Rightarrow$ "Periode unabhängig von Stärke der Auslenkung"

2) <u>freier Fall:</u> $V \sim x$, $k=1$

$$t'/t = \sqrt{x'/x}$$

$$(t'/t)^2 = x'/x$$

$\Rightarrow$ "Quadrate der Fallzeiten verhalten sich wie Fallhöhen."

3) <u>Gravitation</u>: $V \sim \frac{1}{x}$, $k=-1$

$$t'/t = (x'/x)^{3/2}$$

$$(t'/t)^2 = (x'/x)^3$$

$\Rightarrow$ "Quadrate der Umlaufzeiten verhalten sich wie Kuben der Abstände" (3. Keplersches Gesetz)

<u>Verallgemeinerung auf andere Größen:</u>

Zeit $\rightarrow$ Energie, Geschwindigkeit, ...

$$\frac{v'}{v} = \frac{\left(\frac{x'}{t'}\right)}{\left(\frac{x}{t}\right)} = \frac{(x'/x)}{(t'/t)} = \frac{(x'/x)}{(x'/x)^{1-k/2}} = \left(\frac{x'}{x}\right)^{k/2}$$

$$\frac{E'}{E} = \frac{v'^2}{v^2} = \left(\frac{x'}{x}\right)^k$$

Bsp: harmon. Oszillator, $k=2$, $E \sim x^2$

etc.

Drehimpuls:

$$\frac{|\vec{L}'|}{|\vec{L}|} = \frac{x'v'}{xv} = \left(\frac{x'}{x}\right)\left(\frac{x'}{x}\right)^{\frac{k}{2}} = \left(\frac{x'}{x}\right)^{1+\frac{k}{2}}$$

7.6 Virialsatz

$$2T = mv^2 = p\dot{x} = \frac{d}{dt}(px) - \dot{p}x$$

Zeitmittelung:

$$= \frac{d}{dt}(px) + x\frac{\partial V}{\partial x}$$

$$\overline{A} = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t dt'\, A(t')$$

$$\overline{2T - x\frac{\partial V}{\partial x}} = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \frac{d}{dt'}(px)\, dt'$$

$$= \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\left[(px)|_t - (px)|_0\right] = 0$$

falls p & x beschränkt

Also: Für Bewegungen in einem beschränkten Gebiet mit beschränkten Geschwindigkeiten gilt

$$2\bar{T} = \underbrace{\overline{\sum_i \vec{x}_i \frac{\partial V}{\partial \vec{x}_i}}}_{\text{"Virial"}} \; .$$

Falls V homogen vom Grad k:

$$2\bar{T} = k\bar{V}$$

z.B. • harmon. Oszillator: $\bar{T} = \bar{V}$

• Gravitation: $2\bar{T} = -\bar{V}$

(z.B. relevant für Langzeitbeschreibung des Verhaltens vieler gravit. gebundener Massen in einer Galaxie)

Nachtrag zum Noether-Theorem: sei $t \to t$

$$q(t) \to q'(t) = q(t) + \delta q(t)$$

eine Symm. so daß zwar $\delta L \neq 0$ und $\delta S \neq 0$, aber

$L \to L' = L + \frac{d}{dt}(\delta f)$ bzw. $\delta L = \frac{d}{dt}(\delta f)$.

(Dies genügt zur Invarianz der Bewegungsgleichungen). Dann gilt

$$\frac{\partial L}{\partial q}\delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta \dot{q} - \frac{d}{dt}\delta f = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\Big(\underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta q - \delta f}_{\text{Erhaltungsgröße}}\Big) = 0$$

8. Das Zentralkraftproblem

8.1. Bewegung im allg. Zentralpotential

Motivation: Gravitation zweier Massen:

$$V(\bar{r}_1 - \bar{r}_2) = -\frac{G_N m_1 m_2}{|\bar{r}_1 - \bar{r}_2|}$$

$$G_N = 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2}$$

$$\left(N = \frac{kg\,m}{s^2}\right)$$

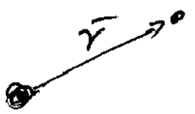
Wichtig: die hier auftretenden schweren Massen sind mit den bisher benutzten trägen Massen identisch. (Ein Körper, der doppelt so stark gravitiert setzt auch der Beschleunigung einen doppelt so großen Widerstand entgegen.)

außerdem: Elektrostatik: versch. Vorzeichen $\nwarrow\downarrow$ möglich!

$$V(\bar{r}_1 - \bar{r}_2) = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 |\bar{r}_1 - \bar{r}_2|}$$

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 8.99 \cdot 10^9 \frac{Nm^2}{C^2}$$

- Zunächst nehmen wir an, einer der beiden Körper (Punktmassen) sei viel schwerer und vernachlässigen dessen Bewegung, also:



$$V(\bar r) = \frac{c}{|\bar r|}$$

- außerdem beginnen wir ohne die Annahme des speziellen $\frac{1}{|\bar r|}$-Verhaltens:

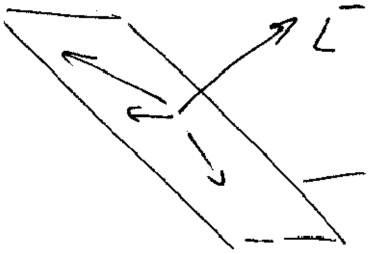
$$V(\bar r) = V(|\bar r|) \quad \text{– allg. Funktion}$$

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\dot{\bar r}^2 - V(|\bar r|)$$

Symmetrie: $\bar r \to \bar r' = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Drehmatrix}}}{R} \cdot \bar r$

$\Rightarrow \bar L = \bar r \times \bar p$ erhalten

aus $\bar L \perp \bar r$ und $\bar L$ fix folgt, daß $\bar r$ stets in einer Ebene bleibt:



Ebene aller zu $\bar L$ orthogonalen Vektoren