2.5a Math. Einschub: Determinante

(siehe auch TP I, Kap. 5.2)

- Eine <u>Permutation</u> ist eine umkehrbare Abb. einer Menge von n Elementen auf sich selbst:

$$\sigma: \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}, \quad i \mapsto \sigma(i).$$

- Es ist oft nützlich, eine Permutation durch Anwendung auf $\{1, \dots, n\}$ darzustellen: $\sigma \leftrightarrow \{\sigma(1), \dots, \sigma(n)\}$.

- Eine Permutation heißt gerade ($\mathrm{sgn}(\sigma) = +1$) falls sie sich aus geradzahlig vielen Vertauschungen von Nachbarn ergibt.

- Das n-dimensionale <u>Levi-Civita-Symbol</u> $\varepsilon^{i_1 \dots i_n}$ ist definiert durch

$$\varepsilon^{\sigma(1)\sigma(2)\dots\sigma(n)} \equiv \mathrm{sgn}(\sigma).$$

- Es gilt also insbesondere

$$\varepsilon^{12\cdots n} = 1 .$$

Vertauschen zweier Indizes ändert das Vorzeichen ("totale Antisymmetrie).

- Die <u>Determinante</u> einer $n\times n$-Matrix ist def. als

$$\det A = \frac{1}{n!} \varepsilon^{i_1\cdots i_n} A^{i_1 j_1} \cdots A^{i_n j_n} \varepsilon^{j_1 \cdots j_n}$$

- Betrachten wir den Ausdruck

$$\varepsilon^{i_1\cdots i_n} A^{i_1 j_1} \cdots A^{i_n j_n}$$

Er hängt ab von $j_1 \cdots j_n$ und ändert beim Vertauschen zweier Indizes das Vorzeichen:

$$\varepsilon^{i_1 i_2\cdots} A^{i_1 j_1} A^{i_2 j_2} \cdots = \varepsilon^{i_1 i_2\cdots} A^{i_2 j_2} A^{i_1 j_1} \cdots$$

$$= \varepsilon^{i_2 i_1\cdots} A^{i_1 j_2} A^{i_2 j_1} \cdots = - \varepsilon^{i_1 i_2\cdots} A^{i_1 j_2} A^{i_2 j_1} \cdots$$

- Der Ausdruck ist also in $j_1 \cdots j_n$ total antisymmetrisch. Dies fixiert den Ausdruck bis den Vorfaktor eindeutig.

- Da dies auch die Eigenschaft des Levi-Civita-Symbols ist, folgt

$$\varepsilon^{i_1 \dots i_n} A^{i_1 j_1} \dots A^{i_n j_n} = c\, \varepsilon^{j_1 \dots j_n}.$$

- Den Vorfaktor c bestimmen wir durch Multiplikation mit $\varepsilon^{j_1 \dots j_n}$ & Summation:

$$n! \det A = c\, \varepsilon^{j_1 \dots j_n} \varepsilon^{j_1 \dots j_n} = c\, n!$$

$$\Rightarrow c = \det A$$

$\Rightarrow$ <u>alternative Def. von Det.:</u>

$$\varepsilon^{i_1 \dots i_n} A^{i_1 j_1} \dots A^{i_n j_n} = (\det A)\, \varepsilon^{j_1 \dots j_n}.$$

- <u>Zentraler Fakt:</u>

$$A \text{ invertierbar} \Leftrightarrow \det A \neq 0.$$

- Wir zeigen $\Leftarrow$ durch explizite Angabe der inversen Matrix:

$$(A^{-1})^{ij} = \frac{1}{(n-1)!} \varepsilon^{j i_2 \dots i_n} \varepsilon^{i j_2 \dots j_n} A^{i_2 j_2} \dots A^{i_n j_n} \cdot \frac{1}{\det A}.$$

- Wir prüfen, dass dies wirklich das Inverse ist:

$$(A^{-1})^{ij} A^{jk} = \frac{1}{(n-1)!\,\det A}\, \varepsilon^{j i_2 \cdots i_n} \varepsilon^{i j_2 \cdots j_n} \cdot A^{jk} A^{i_2 j_2} \cdots A^{i_n j_n}$$

$$= \frac{1}{(n-1)!\,\det A} \cdot (\det A)\, \underbrace{\varepsilon^{k j_2 \cdots j_n} \varepsilon^{i j_2 \cdots j_n}}_{(n-1)!\, \delta^{ki}} = \delta^{ki} \quad \checkmark$$

- Die Gegenrichtung "⇒" liegt nahe, weil unser A^{-1} divergiert wenn $\det A \to 0$. Wir verzichten auf einen Beweis. *)

<u>Kommentar:</u> Der in unserer Formel wichtige Ausdruck (*)

$$\frac{1}{(n-1)!}\, \varepsilon^{i i_2 \cdots i_n} \varepsilon^{j j_2 \cdots j_n} A^{i_2 j_2} \cdots A^{i_n j_n}$$

kann auch als $(-1)^{i+j} \det(M(i,j))$ geschrieben werden. Dabei geht $M(i,j)$ aus A durch Streichen von Zeile i & Spalte j hervor. (*) heißt "Matrix der Kofaktoren".

*) Wenn wir den Satz

$$\det(AB) = (\det A)\cdot(\det B)$$

voraussetzen, den man mittels oberer Dreiecks-Form beweist und den Sie evtl. kennen, dann ist der Beweis von "$\Rightarrow$" einfach:

$$A A^{-1} = \mathbb{1}$$

$$\Rightarrow (\det A)(\det A^{-1}) = 1$$

$$\Rightarrow \det A \neq 0 \quad \checkmark$$