2.5c Math. Einschub: Diagonalisierbarkeit einer herm. Matrix

Sei H hermitesch.

$\det(H - \lambda \mathbb{1}) = 0$ hat eine Lsg. $\lambda_1 \in \mathbb{C}$.

(Fund. satz d. Algebra).

Also gilt für die Matrix $A = H - \lambda_1 \mathbb{1}$

$\det A = 0$. A ist demnach nicht invertierbar. Es muss also einen Vektor x geben, so dass $Ax = 0$.

Falls es kein solches x gibt, ist

$$A(\underset{\in \mathbb{C}}{x_i}\, \underset{\text{Basis}}{e_i}) = x_i A e_i \neq 0 \quad \text{für alle } x_i$$

Dann ist Ae_i also eine Basis und A ist invertierbar ↯

$$Ax = 0 \quad \Rightarrow \quad (H - \lambda_1 \mathbb{1})x = 0$$

$$\Rightarrow \quad Hx = \lambda_1 x .$$

Wir nennen diesen Vektor x_1:

$Hx_1 = \lambda_1 x_1$. Es ist der Eigenvektor zu λ_1. (Wir haben bisher Hermitizität nicht gebraucht!)

- Jetzt betrachten wir das orthogonale Komplement $\{x_1\}_\perp \subset \mathcal{H}$ in $\mathcal{H}$ zu x_1.

- Behauptung: H bildet $\{x_1\}_\perp$ auf sich selbst ab. Begründung:

Sei $y \in \{x_1\}_\perp$, also $y^+ x_1 = 0$.
Dann gilt

$$(Hy)^+ x_1 = y^+ H^+ x_1 = y^+ H x_1 = \lambda_1 y^+ x_1 = 0$$

✓.

- Wir können also von dem auf $\{x_1\}_\perp$ wirkenden, abstrakten Operator $\hat{H}$ sprechen. Man sieht leicht, dass $\hat{H}$ auf $\{x_1\}_\perp$ wieder hermitesch ist.

- Wir konstruieren nun eine Basis von $\{x_1\}_\perp$ und ordnen $\hat{H}|_{\{x_1\}_\perp}$ eine herm. $(n-1)\times(n-1)$-Matrix zu. Jetzt wiederholen wir obiges Argument und finden λ_2, x_2 ... usw. λ_n, x_n

---

- Am Ende normieren wir die Eigenvektoren und nennen sie $|\lambda_i\rangle$ (zu den Eigenwerten λ_i).

- Sie bilden eine <u>Orthonormalbasis</u>.

(Orthogonalität hat sich aus unserer Konstruktion automatisch ergeben, kann aber auch direkt gezeigt werden:

$$0 = \langle\lambda_1|H|\lambda_2\rangle - \langle\lambda_1|H^+|\lambda_2\rangle = \langle\lambda_1|H|\lambda_2\rangle - \langle\lambda_2|H|\lambda_1\rangle^*$$

$$= \lambda_2\langle\lambda_1|\lambda_2\rangle - \lambda_1\langle\lambda_2|\lambda_1\rangle^* = (\lambda_2-\lambda_1)\langle\lambda_1|\lambda_2\rangle \checkmark\,)$$