2.5b Math. Einschub: Fundamentalsatz der Algebra

Satz: Ein Polynom $P(z)$ $(z \in \mathbb{C})$ vom Grad $n \geq 1$ hat eine Nullstelle.

(Genaugenommen hat es sogar n Nullstellen, denn wenn man eine hat, so kann man schreiben

$$P_n(z) = (z - z_0)\, P_{n-1}(z).$$

Jetzt wendet man den Satz auf P_{n-1} an.)

Beweisidee:

$|P(z)| \to \infty$ für $|z| \to \infty$. Also muss es ein $w \in \mathbb{C}$ geben, so dass $|P(w)|$ der Minimalwert von $|P(z)|$ ist.

Falls $|P(w)| = 0$ sind wir fertig. Sonst Taylor-entwickeln wir um w:

$$P(w+z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots \quad (c_0 \neq 0).$$

- Falls nun $c_1 \neq 0$, so haben wir bei hinreichend kleinem z angenähert $P(w+z) \approx c_0 + c_1 z$.

  Es ist leicht zu sehen, dass $|c_0 + c_1 z|$ <u>nicht</u> bei $z=0$ minimal ist $\lightning$.

- Falls $c_1 = 0$ & $c_2 \neq 0$, hat man analog $P(w+z) \approx c_0 + c_2 z^2$, wieder mit der Folgerung, dass $|c_0 + c_2 z^2|$ nicht bei $z=0$ minimal ist $\lightning$.

- Usw. ✓