Math. Einschub:

Lie-Algebren, speziell Lie(SO(3))

(vgl. Mechanik-Skripte: (I, 6.4); (II, 7.4))

- Sei SO(3) die Drehgruppe, also die orthog. Matrizen mit det = 1.
- Wir definieren die Lie-Algebra dazu als

$$\mathrm{Lie}(SO(3)) = \mathrm{Span}_{\mathbb{R}}\{T_1, T_2, T_3\}$$

mit $T_1 = \begin{pmatrix} 0&0&0 \\ 0&0&1 \\ 0&-1&0 \end{pmatrix}$; $T_2 = \begin{pmatrix} 0&0&-1 \\ 0&0&0 \\ 1&0&0 \end{pmatrix}$; $T_3 = \begin{pmatrix} 0&1&0 \\ -1&0&0 \\ 0&0&0 \end{pmatrix}$

bzw. $(T_i)_{jk} = \varepsilon_{ijk}$.

<u>Behauptung</u>: $\exp(i\varepsilon_i (iT_i)) = R(\bar{\varepsilon})$

Drehung um $\bar{\varepsilon}$-Achse um Winkel $|\bar{\varepsilon}|$.

(Prüfen Sie dies explizit für $\bar{\varepsilon} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \varphi \end{pmatrix}$ mit $\varphi \ll 1$.)

Äquivalente Aussage: $\exp(\mathrm{Lie}(SO(3)) = SO(3)$

(aber $\exp: \mathrm{Lie}(SO(3)) \to SO(3)$ ist nicht injektiv)

Leicht zu prüfen: $[T_i, T_j] = -\varepsilon_{ijk} T_k$

bzw. $[-iT_i, -iT_j] = i\varepsilon_{ijk}(-iT_k)$.

[Die "$-i$"s sind eine "Physiker-Konvention", die dazu dient, mit hermiteschen Matrizen arbeiten zu können.]

Allgemeiner: Sei G eine Matrix-Gruppe (kontinuierlich). Dann $\exists$ Vektorraum $\mathrm{Lie}(G)$ so dass $\exp(\mathrm{Lie}(G)) = G$.

$$0 \in \mathrm{Lie}(G), \quad \mathbb{1} \in G, \quad 0 \xmapsto{\exp.} \mathbb{1}$$

- Exp. ist bijektiv in Nähe der 0.
- $[\mathrm{Lie}(G), \mathrm{Lie}(G)] \subset \mathrm{Lie}(G)$.

- Information in Kommutator-Relationen auf Lie(G) charakterisiert G (fast) eindeutig.

Formale Lie-Alg. Definition:

Vektorraum V mit bilinearer, antisymm. Operation $V \times V \to V$; $(a,b) \mapsto f(a,b)$, welche die Jacobi-Identität erfüllt:

$$f(a, f(b,c)) + \text{cycl.} = 0.$$

Fakt: Zu jeder Lie-Gruppe (Gruppe + Mgf.) gehört Lie-Alg. und umgekehrt (mit abstrakter exp-Abb.)

Fakt: Zu jeder Matrix-Lie-Gr. gehört Matrix-Lie-Alg. mit $f(a,b) = [a,b]$.

(Symbol $[\cdot,\cdot]$ wird oft auch abstrakt benutzt.)

"Triviales" nicht-Matrix Beispiel:

Lie (Translationen auf $\mathbb{R}$) = $\mathbb{R}$,

Definiere Basis-Element $e \equiv 1$.

$\exp(\alpha \cdot e): \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $x \mapsto x + \alpha$.