Institut für Theoretische Physik III
Universität Erlangen–Nürnberg
Jan M. Pawlowski

10. Ward-Takahashi Identitäten in der QED

Das Erzeugende Funktional der QED (Elektronen und Photonen) in einer allgemeinen linearen Eichung ist durch

$$Z[J,\eta,\bar\eta] = \int dA\, d(\psi,\bar\psi)\, e^{-\left(S_A[A]+S_{\rm gf}[A]+S_D[A,\psi,\bar\psi]\right)+\int d^4x\left(J_\mu A_\mu+\bar\eta\psi+\bar\psi\eta\right)} \tag{1}$$

mit

$$S_A[A,\psi,\bar\psi] = \frac{1}{4}\int d^4x\, F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}, \qquad S_{\rm gf}[A] = \frac{1}{2\xi}\int d^4x\,(l_\mu A_\mu)^2,$$

$$S_D[A,\psi,\bar\psi] = \int d^4x\,\bar\psi(-i\not{D}+m)\psi \qquad \text{und} \qquad \not{D} = \not{\partial} + i\,e\not{A} \tag{2}$$

gegeben. Das Maß $dA\, d(\psi,\bar\psi)$ und die Wirkungen S_A und S_D sind invariant unter den Eichtransformationen

$$A_\mu \to A_\mu - \partial_\mu\theta, \qquad \psi \to e^{ie\theta}\,\psi, \qquad \bar\psi \to \bar\psi\, e^{-ie\theta}, \tag{3}$$

während $S_{\rm gf}[A]$ und die Quellterme nicht invariant sind.

a) Zeige durch Anwendung von infinitesimalen Transformationen auf die Integrationsvariablen in (1), daß das Erzeugende Funktional die Ward-Takahashi Identitäten

$$\partial_\mu J_\mu(x) + i\,e\left(\bar\eta(x)\langle\psi(x)\rangle_{\mathcal J} - \langle\bar\psi(x)\rangle_{\mathcal J}\eta(x)\right) - \tfrac{1}{\xi}\,\partial_\mu l^\dagger_\mu l_\nu\langle A_\nu(x)\rangle_{\mathcal J} = 0 \tag{4}$$

erfüllt. J ist eine Abkürzung für $\mathcal J = (J_\mu,\eta,\bar\eta)$ und die Erwartungswerte in (4) sind definiert durch

$$\langle\phi\rangle_{\mathcal J} := \frac{1}{Z[J,\eta,\bar\eta]}\int dA\, d(\psi,\bar\psi)\,\phi\, e^{-\left(S_A[A]+S_{\rm gf}[A]+S_D[A,\psi,\bar\psi]\right)+\int d^4x\left\{J_\mu A_\mu+\bar\eta\psi+\bar\psi\eta\right\}}. \tag{5}$$

b) Leite die Ward-Takahashi Identität für die Zweipunktfunktion $\langle A_\mu(x)A_\nu(y)\rangle_{J=0}$ her.

c)* Die Effektive Wirkung $\Gamma[A,\psi,\bar\psi]$ ist die Legendretransformierte des Schwingerfunktionals $W[\mathcal J] = \ln Z[\mathcal J]$ mit

$$\Gamma[A,\psi,\bar\psi] = \sup_{\mathcal J}\left\{\int d^4x\,\left(J_\mu A_\mu + \bar\eta\psi + \bar\psi\eta\right) - W[\mathcal J]\right\}. \tag{6}$$

Zeige, daß sich die Ward-Takahashi Identitäten (4) schreiben lassen als

$$\partial_\mu\frac{\delta\Gamma}{\delta A^\mu(x)} - i\,e\left(\frac{\delta\Gamma}{\delta\psi(x)}\psi(x) + \bar\psi(x)\frac{\delta\Gamma}{\delta\bar\psi(x)}\right) - \tfrac{1}{\xi}\,\partial_\mu l^\dagger_\mu l_\nu A_\nu(x) = 0. \tag{7}$$

Wie lautet die Ward-Takahashi Identität für die Zweipunktfunktion $\frac{\delta^2}{(\delta A)^2}\Gamma|_{A=0,\psi=0,\bar\psi=0}$?

d)* Was ändert sich in der Eichung $\partial_\mu A_\mu + A_\mu A_\mu = 0$.