Institut für Theoretische Physik III
Universität Erlangen–Nürnberg
Jan M. Pawlowski

WS 2003/04

22. Januar 2004

Blatt 12

12. Funktionale Methoden

Das Schwingerfunktional $W[J] = \log Z[J]$ einer Theorie ist das Erzeugende Funktional zusammenhängender Greenscher Funktionen. In einer skalaren Theorie gilt

$$W[J] = \log \int d\varphi\, e^{-S[\varphi]+\int d^4x\, J(x)\varphi(x)} \quad \text{mit} \quad S[\varphi] = \frac{1}{2}\int d^4x\, \varphi(x)(-\partial^2 + m^2)\varphi(x) + V[\varphi]. \tag{1}$$

Hier steht $V[\varphi]$ für ein allgemeines Potential. In der ϕ^4-Theorie hätten wir zum Beispiel $V[\varphi] = \lambda/4! \int d^4x\, \varphi^4(x)$. Die Effektive Wirkung $\Gamma[\phi]$ ist die Legendretransformierte des Schwingerfunktionals

$$\Gamma[\phi] = \sup_J \left(\int d^4x\, J(x)\phi(x) - W[J] \right). \tag{2}$$

In den meisten Fällen existiert ein Maximum, was wir im Folgenden genauso annehmen wie Differentierbarkeit (C^∞) von $W[J]$ nach J.

a) Zeige, daß

$$\phi(x) = \frac{\delta W[J]}{\delta J(x)} = \langle \varphi(x) \rangle_J \qquad \text{und} \qquad J(x) = \frac{\delta \Gamma[\phi]}{\delta \phi(x)}. \tag{3}$$

b) Berechne die Effektive Wirkung der freien skalaren Theorie, $V[\varphi] = 0$.

c) Zeige, daß die Effektive Wirkung durch die folgende Integrodifferentialgleichung definiert wird

$$\exp\{-\Gamma[\phi]\} = \int d\varphi\, \exp\left\{ -S[\varphi] + \int d^4x\, \frac{\delta\Gamma[\phi]}{\delta\phi(x)} \big(\varphi(x) - \phi(x)\big) \right\}. \tag{4}$$

d) Die Effektive Wirkung erfüllt die Funktionalgleichung

$$\frac{\delta\Gamma[\phi]}{\delta\phi(x)} = \left\langle \frac{\delta S[\varphi]}{\delta\varphi(x)} \right\rangle_{J=\frac{\delta\Gamma}{\delta\phi}}. \tag{5}$$

Beweise (5) mit Hilfe von (4). Was folgt für ϕ_c, eine Lösung der Bwegungsgleichung

$$\frac{\delta\Gamma}{\delta\phi(x)}[\phi_c] = 0. \tag{6}$$

e)* Leite die Callan-Symanzik Gleichung der zweidimensionalen QED (massives Schwingermodell) her. Ist diese Gleichung wohldefiniert?