Institut für Theoretische Physik III
Universität Erlangen–Nürnberg
Jan M. Pawlowski

WS 2003/04
11. November 2003
Blatt 3

3. Felder und Symmetrien

Es sei $\{\phi_i(x)\}$ ein Satz klassischer Felder und die dazugehörige Lagrangedichte $\mathcal{L}$ eine lokale Funktion dieser Felder und ihrer Ableitungen $\mathcal{L} \equiv \mathcal{L}(\phi_i(x), \partial_\mu\phi_i(x))$. Eine kontinuierliche Symmetrie, die infinitesimal durch globale Parameter $\delta\omega_r$ charakterisiert sei, entspricht Transformationen der Felder gemäß

$$\delta\phi(x) = \delta_0\phi(x) + (\partial_\mu\phi(x))\,\delta x^\mu\ . \tag{1}$$

Im Fall $\delta x^\mu = 0$ spricht man von einer inneren Symmetrie, für $\delta x^\mu \neq 0$ von einer Symmetrie der Raumzeit, und mit $\delta - \delta_0$ bezeichnet man den Bahnanteil der Symmetrietransformation. Die Invarianz der Lagrangedichte bedeutet dabei, daß

$$\delta\mathcal{L} = \delta_0\mathcal{L} + (\partial_\mu\mathcal{L})\,\delta x^\mu\ =\ 0\ . \tag{2}$$

Für die Variation der Feldvariablen zu fester Raumzeit, dem inneren Anteil der Transformation, gilt $\partial_\mu\delta_0 = \delta_0\partial_\mu$.

a) Für globale Transformationen der Raumzeit (mit konstanten Parametern) gilt infinitesimal, $x'^\mu = x^\mu + \delta x^\mu$ mit $\partial_\mu\delta x^\mu = 0$. Zeige, daß damit die Invarianz der Lagrangedichte aus der der Wirkung $S = \int d^4x\,\mathcal{L}$ folgt,

$$\delta S\ =\ 0\quad\Leftrightarrow\quad\delta\mathcal{L}\ =\ 0\ . \tag{3}$$

Hinweis: Für eine infinitesimale Matrix ϵ gilt, $\det(\mathbb{1} + \epsilon) = 1 + \mathrm{Sp}(\epsilon) + \mathcal{O}(\epsilon^2)$ (warum?).

b) Zeige mit Hilfe der klassischen Euler-Lagrange-Gleichungen,

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_i(x)} - \partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_i(x))}\ =\ 0\ , \tag{4}$$

daß aus (2) zu jedem Parameter $\delta\omega_r$ der Symmetrietransformation ein Noether-Strom J_r^μ gehört, der durch

$$J_r^\mu(x)\,\delta\omega_r\ =\ -\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_i(x))}\,\delta\phi_i(x)\ +\ \left\{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_i(x))}\,\partial_\nu\phi_i(x) - \mathcal{L}\,g^\mu{}_\nu\right\}\delta x^\nu \tag{5}$$

definiert und erhalten ist, d.h. $\partial_\mu J_r^\mu(x)\ =\ 0$.

c) Unter Translationen $\phi(x) \to \phi'(x) = \phi(x - a)$, und daher $\phi'(x') = \phi(x)$. Zeige damit für infinitesimale Translationen mit $\delta x^\mu = \delta a^\mu$, daß der zugehörige Noether-Strom durch die Komponenten des (kanonischen) Energie-Impus-Tensors gegeben ist,

$$T^{\mu\nu}\ =\ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_i(x))}\,\partial^\nu\phi_i(x) - \mathcal{L}\,g^{\mu\nu}\quad\text{mit}\quad\partial_\mu T^{\mu\nu}\ =\ 0\ , \tag{6}$$

und daß das Integral

$$P^\mu\ :=\ \int_{x^0=t} d^3x\ T^{0\mu}(\vec{x}, t)\ , \tag{7}$$

welches die entsprechenden Noether-Ladungen definiert, zeitunabhängig ist.