4. Pfadintegral in der QM

Das Pfadintegral in der Euklidischen Quantenmechanik ist definiert als

$$Z[J] = \int [dq] e^{-S[q]+\int d\tau J(\tau)\, q(\tau)} \qquad \text{mit} \quad S[q] = \int d\tau \left\{ \tfrac{1}{2} m\dot{q}^2 + v[q] \right\} \tag{1}$$

In (1) haben wir uns auf zeitunabhängige Potentiale beschränkt. Korrelationsfunktionen ergeben sich als Funktionalableitungen nach dem Strom J:

$$\langle q(t_1) \cdots q(t_n) \rangle = \tfrac{1}{Z[0]} \tfrac{\delta}{\delta J(t_1)} \cdots \tfrac{\delta}{\delta J(t_n)} Z[J] \Big|_{J=0} . \tag{2}$$

a) Wir betrachten zuerst eine endlichdimensionale Version von (1): Sei A eine positive symmetrische $n \times n$ Matrix, und p, j seien n-dimensionale reelle Vektoren. Zeige folgende Gleichung

$$Z(j) \equiv \int dp_1 \cdots dp_n \exp\left(-\frac{1}{2} p^T A p + p^T j \right) = (2\pi)^{n/2} \frac{1}{\sqrt{\det A}} \exp\left[\frac{1}{2} j^T A^{-1} j \right] . \tag{3}$$

Tip: A ist diagonalisierbar.

b) Das $m$te Moment des Maßes $d\mu(p) = \prod_i dp_i \exp\{-\frac{1}{2} p^T A p\}$, der m-Punktkorrelator, ist definiert als

$$\langle p_1 \cdots p_m \rangle \equiv \frac{1}{Z} \int d\mu(p)\, p_1 \cdots p_m , \quad \text{with } Z \equiv \int d\mu(p) . \tag{4}$$

Er kann mit Hilfe von Gleichung (3) berechnet werden. Zeige, daß der m-Punktkorrelator wie folgt erhalten werden kann:

$$\langle p_1 \cdots p_m \rangle = \frac{1}{Z(0)} \left[\frac{\partial^m Z(j)}{\partial j_1 \cdots \partial j_m} \right] \Bigg|_{j=0} = \left[\frac{\partial}{\partial j_1} \cdots \frac{\partial}{\partial j_m} \exp\left[\frac{1}{2} j^T A^{-1} j \right] \right] \Bigg|_{j=0} . \tag{5}$$

Berechne explizit die Momente $\langle p_1 p_2 \rangle$ und $\langle p_1 p_2 p_3 p_4 \rangle$. Ersteres nennt man den Propagator von 2 nach 1.

c) Zeige für zeitunabhängige Potentiale, daß

$$\langle q(t_1) \cdots q(t_n) \rangle = \langle 0 | T\, Q(t_1) \cdots Q(t_n) | 0 \rangle \quad \text{mit} \quad Q(t) = e^{tH}\, q_{\text{op}}\, e^{-tH} .$$

Hier ist Q die Heisenbergdarstellung des Operators q_{op} und T bedeutet Zeitordnung:

$$T\, O_1(t_1) O_2(t_2) = O(t_1) O(t_2) \theta(t_1 - t_2) + O(t_2) O(t_1) \theta(t_2 - t_1). \tag{6}$$

d) Zeige, daß für die Zweipunktfunktion $\langle q(0)q(t)\rangle$ die 'Källen-Lehmann Darstellung' gültig ist:

$$\tilde{Z}^{(2)}(\omega) = 2\pi|\langle 0|q|0\rangle|^2\delta(\omega) + 2\sum_{n>0}\frac{(\epsilon_n - \epsilon_0)|\langle 0|q|n\rangle|^2}{\omega^2 + (\epsilon_n - \epsilon_0)^2},$$

wobei

$$\tilde{Z}^{(2)}(\omega) = \int dt \langle q(0)q(t)\rangle\, e^{i\omega t}$$

die Fouriertransformierte der Zweipunktfunktion ist.