Institut für Theoretische Physik III
Universität Erlangen–Nürnberg
Jan M. Pawlowski

WS 2003/04

19. November 2003

Blatt 5

5. Propagatoren und Wickrotation

Der Euklidische Feynmanpropagator $G_F = \langle \phi(x)\phi(0)\rangle$ einer massiven skalaren Theorie ist die Greensche Funktion $\hat{G}_F$ des Operators $\Delta + m^2$ mit $\Delta = -\partial_\mu\partial_\mu$:

$$(\Delta + m^2)\,\hat{G}_F(x;m) \;=\; \delta^{(4)}(x) \tag{1}$$

und besitzt die Darstellung

$$\hat{G}_F(x;m) \;=\; \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\,\frac{e^{ip_\mu x_\mu}}{p_\mu p_\mu + m^2}. \tag{2}$$

Der Übergang zur skalaren Theorie im Minkowskiraum wird durch eine *Rotation* der Zeitachse mit $x^0 \to ix^0$ durchgeführt, der Wickrotation.

a) Zeige, daß $\hat{G}_F$ aus (2) die Gleichung (1) erfüllt und berechne $\hat{G}_F(x;0)$.

Tip: Sei $x \geq 0$. Benutze $e^{ipx} = \lim\limits_{\epsilon\to 0_+} e^{ipx-\epsilon x}$ und vertausche Integration und Limes.

b) Zeige, daß der Feynmanpropagator im Minkowskiraum durch

$$G_F(x;m) \;=\; -i\,\hat{G}_F(ix^0,\vec{x};m) \;=\; -\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\,\frac{e^{ip_\mu x^\mu}}{p_\mu p^\mu - m^2 + i\epsilon} \tag{3}$$

gegeben ist. In (3) steht ϵ für eine infinitesimale positive Größe. G_F ist die Greensche Funktion des Operators $(\partial_\mu\partial^\mu + m^2)$ mit $(\partial_\mu\partial^\mu + m^2)G_F(x;m) = \delta^{(4)}(x)$.

c) Zeige mit Gleichung (3), daß $G_F(x;m) = \langle\phi(x)\phi(0)\rangle = \langle 0|T\phi(x)\phi(0)|0\rangle$, der Feynmanpropagator im Minkowskiraum, zeitgeordnet ist.

Tip: Benutze, daß

$$\int \frac{dp_0}{2\pi i}\,\frac{e^{ip_0x^0}}{p_0 + c - id} = \theta(x^0)\,e^{-ic-d}$$

für $d > 0$. Hier ist $\theta(t)$ die Heavyside Sprungfunktion: $\theta(t<0) = 0$, $\theta(t>0) = 1$.

d*) Die kanonische Quantisierung basiert auf kanonischen Vertauschungsrelationen zu gleichen Zeiten: $[\phi(0),\ \Pi(0,\vec{x})] = i\delta(\vec{x})$, mit Feldern ϕ und Impulsen Π. In der freien skalaren Theorie gilt $\Pi(x) = \partial^0\phi(x)$. Zeige, daß

$$\langle 0|\,[\phi(0),\ \Pi(0,\vec{x})]\,|0\rangle = -\lim_{p_0\to\infty} p_0 \int dx^0\, e^{-ip_0x^0}\,\partial^0 G_F(x;m) = i\delta(\vec{x}).$$

Verwende beim Beweis, daß

$$\lim_{p_0\to\infty}\int dx^0\, e^{-ip_0x^0}\langle\partial^0\phi(x^0,\vec{x})\phi(0)\rangle = 0. \tag{4}$$

Unter welchen Bedingungen gilt (4). Dieses Verfahren nennt man Bjorken-Johnson-Low Limes. Was gilt allgemein für $\lim_{p_0\to\infty} p_0 \int dx^0\, e^{-ip_0x^0}\langle A(x^0,\vec{x})B(0)\rangle$?