Institut für Theoretische Physik III
Universität Erlangen–Nürnberg
Jan M. Pawlowski

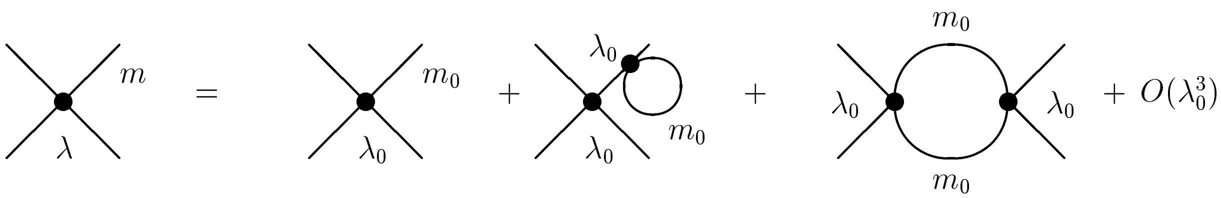
8. Regularisierung & Fermionisches Pfadintegral

Die klassische Wirkung der ϕ^4 Theorie ist durch

$$S[\phi;\lambda_0,m_0]=\int d^4x\left\{\frac{1}{2}\phi(x)(-\partial^2+m_0^2)\phi(x)+\frac{\lambda_0}{4!}\phi^4(x)\right\}\tag{1}$$

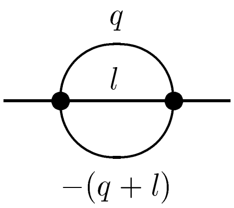
gegeben.

a) Berechne den Beitrag der Einschleifenkorrektur mit Schleifenimpulsen $p^2\le\Lambda^2$ für verschwindende äußere Impulse zur Vierpunktfunktion. Wähle nun die Masse $m_0^2=m^2+\lambda_0\,\Delta m^2$ und die Kopplung $\lambda_0=\lambda+\lambda_0^2\,\Delta\lambda$ des Skalarfeldes so, daß



für ein vorgegebenes festes λ.

b) Betrachte das Sunset-Diagramm für verschwindende äußere Impulse und Loopimpulse $q^2, l^2, (l+q)^2\le\Lambda^2$.



In welche Diagramme können die Λ-Abhängigkeiten absorbiert werden? Wann ist allgemein ein Diagramm endlich?

c) Seien θ_i Grassmannvariablen mit $\{\theta_i,\theta_j\}=\theta_i\theta_j+\theta_j\theta_i=0$ mit $i,j=1,2,...,n$. Zeige, daß

$$\{\frac{\partial}{\partial\theta_i},\frac{\partial}{\partial\theta_j}\}=0,\qquad \{\frac{\partial}{\partial\theta_i},\theta_j\}=\delta_{ij},\qquad \int d\theta_i f(\theta)=\frac{\partial}{\partial\theta_i}f(\theta).\tag{2}$$

Es gilt für die Diracsche δ-Funktion, daß $\delta(\theta)=\theta$. Warum?

d) Zeige, daß

$$\int\prod_{i=1}^n d\theta_i\,d\bar\theta_i\,\exp\{\sum_{i,j}^n\bar\theta_i A_{ij}\theta_j+\sum_{i=1}^n(\bar\eta_i\theta_i+\bar\theta_i\eta_i)\}=\det A\,\exp(-\sum_{i,j}^n\bar\eta_i A_{ij}^{-1}\eta_j).\tag{3}$$

Was folgt für Pfadintegrale über fermionische Variablen?