Institut für Theoretische Physik III
Universität Erlangen–Nürnberg
Jan M. Pawlowski

9. Vakuumpolarisation der QED

Die Vakuumpolarisation enthält die Quantenkorrekturen zur Propagation des Photons. Diese Korrekturen enthalten in jeder Ordnung der Kopplung divergente Beiträge. Im Folgenden werden wir die sogenannte dimensionelle Regularisierung verwenden, in welcher explizite Rechnungen besonders einfach sind.
Bei der dimensionellen Regularisierung wird die Dimension als beliebige reelle Zahl 2ω angenommen, zum Beispiel $2\omega = 4 - 2\epsilon$ mit $\epsilon \to 0$. Wir definieren

$$\int \frac{d^{2\omega}q}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{1}{(q^2+m^2+2q\cdot p)^n} = \frac{\Gamma(n-\omega)}{(4\pi)^\omega \Gamma(n)} \frac{1}{(m^2-p^2)^{n-\omega}}\,. \tag{1}$$

Die Definition (1) ist die analytische Fortsetzung des Integrals für $2\omega \in \mathbb{N}$.

a) Zeige, daß

$$\int \frac{d^{2\omega}q}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{q_\mu}{(q^2+m^2+2q\cdot p)^n} = -\frac{\Gamma(n-\omega)}{(4\pi)^\omega \Gamma(n)} \frac{p_\mu}{(m^2-p^2)^{n-\omega}} \tag{2}$$

und

$$\begin{aligned}\int \frac{d^{2\omega}q}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{q_\mu q_\nu}{(q^2+m^2+2q\cdot p)^n} &= \frac{1}{(4\pi)^\omega \Gamma(n)} \Big[p_\mu p_\nu \frac{\Gamma(n-\omega)}{(m^2-p^2)^{n-\omega}} \\ &\qquad + \frac{1}{2}\delta_{\mu\nu} \frac{\Gamma(n-\omega-1)}{(m^2-p^2)^{n-\omega-1}}\Big]\,.\end{aligned} \tag{3}$$

b) Zeige außerdem, daß

$$\frac{1}{q^2}\frac{1}{(q+p)^2} = \int_0^1 d\alpha \frac{1}{(q^2+\alpha(2p\cdot q+p^2))^2} \tag{4}$$

Allgemein gilt

$$\prod_{i=1}^N \frac{1}{P_i^{n_i}} = \frac{\Gamma(\sum_{i=1}^N n_i)}{\prod_{i=1}^N \Gamma(n_i)} \int_0^\infty \prod_{i=1}^N d\alpha_i\, \alpha_i^{n_i-1} \delta(1-\sum_{i=1}^N \alpha_i) \Big(\sum_{i=1}^N \alpha_i\, P_i\Big)^{-\sum_{i=1}^N \alpha_i} \tag{5}$$

mit $n_i \in \mathbb{R}$ für alle $i = 1, ..., N$. Die α_i nennt man Feynmanparameter. Die Gleichung (4) folgt aus (5) mit $N = 2$ und $n_1 = n_2 = 1$.

c) Berechne den führenden $O(1/\epsilon)$-Anteil der Einschleifenvakuumpolarisation $\langle A_\mu A_\nu \rangle_{1\text{loop}}(p)$ eines Vektorfeldes A_μ, daß an masselose Diracfermionen koppelt. Benutze dazu (2), (3) und (5). Außerdem gilt in vier Dimensionen

$$\mathrm{tr}\gamma_\mu\gamma_\rho\gamma_\nu\gamma_\sigma = 4(\delta_{\mu\rho}\delta_{\nu\sigma} + \delta_{\mu\sigma}\delta_{\nu\rho} - \delta_{\mu\nu}\delta_{\rho\sigma}). \tag{6}$$

Was gilt für beliebige Dimensionen $d \in R$?

d*) Berechne die volle Vakuumpolarisation für massive Fermionen.