Institut für Theoretische Physik III
Universität Erlangen–Nürnberg
Jan M. Pawlowski

WS 2003/04

28. November 2003

Blatt 6

6. Wicksches Theorem und Asymptotische Reihen

Das Erzeugende Funktional $Z[J]$ einer freien skalaren Theorie ist durch

$$Z_0[J] = \int d\phi \; \exp\{-\tfrac{1}{2}\int d^4x\, \phi(x)(\Delta + m^2)\phi(x) + \int d^4x\, \phi(x)J(x)\} \tag{1}$$

mit

$$\langle \phi(x_1)\cdots\phi(x_{2n})\rangle = \sum_\sigma \prod_{i=1}^{n} G_F(x_{\sigma(2i-1)}, x_{\sigma(2i)}; m). \tag{2}$$

gegeben, wobei $G_F(x;m)$ der Feynmanpropagator zu $(\Delta+m^2)$ ist. In (2) steht $\sum_\sigma$ für die Summe über beliebige Permutationen σ von $(1,...,2n)$ mit $\sigma(2i-1) < \sigma(2i)$ und $\sigma(2i-1) < \sigma(2i+1)$. Sogenannte Zusammenhängende Greensche Funktionen besitzen als erzeugendes Funktional

$$W[J] = \ln Z[J], \qquad \text{mit} \qquad \langle \phi(x_1)\cdots\phi(x_n)\rangle_{\rm c} := \prod_{i=1}^{n} \frac{\delta}{\delta J(x_i)} W[J]|_{J=0}. \tag{3}$$

Man nennt W auch das Schwingerfunktional.

a) Man überzeuge sich von der Gültigkeit von Gleichung (2) und zeige für die freie skalare Theorie

$$\langle \phi(x_1)\cdots\phi(x_n)\rangle_{\rm c} = G_F(x_1, x_2; m)\, \delta_{n2}. \tag{4}$$

b) Gegeben sei die folgende Funktion $Z(\lambda)$ der Kopplung $\lambda > 0$:

$$Z(\lambda) \,:=\, \int_{-\infty}^{\infty} d\varphi \;\exp\left[-\frac{1}{2}\varphi^2 - \frac{\lambda}{4}\varphi^4\right] \,. \tag{5}$$

Berechne die Koeffizienten Z_n der störungstheoretischen Entwicklung nach Potenzen der Kopplung λ,

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} Z_n \lambda^n \,, \qquad \text{Hinweis:} \quad \int_0^\infty dt\, e^{-t} t^x \;=\; \Gamma(x+1)\;. \tag{6}$$

Was erhält man für den Konvergenzradius dieser Reihe um $\lambda = 0$?

c) Der Fehler R_N der Partialsumme mit Ordnung N kann durch folgende obere Schranke abgeschätzt werden kann:

$$R_N = |Z(\lambda) - \sum_0^N Z_n\lambda^n| \le \lambda^{N+1}|Z_{N+1}| \quad . \tag{7}$$

Der Beweis ist unten beigeügt. Benutze die Stirlingformel

$$\Gamma(x\to\infty) \to x^{x-\frac{1}{2}}\, e^{-x}\sqrt{2\pi} \tag{8}$$

zur Näherung der $\lambda^n Z_n$ für große n und bestimme damit die (näherungsweise) Ordnung $N = N_{min}$, die den Fehler in obiger Partialsumme minimiert.

Beweis von (7): Die Abschätzung folgt mit

$$\begin{aligned} R_N &= \int d\varphi\, e^{-\frac{1}{2}\varphi^2}\, |e^{-\frac{1}{4}\varphi^4} - \sum_{n=0}^{N} \tfrac{1}{n!}(-\lambda)^n (\tfrac{1}{4}\varphi^4)^n| \\ &\leq \int d\varphi\, e^{-\frac{1}{2}\varphi^2}\, \tfrac{1}{(N+1)!}\lambda^{N+1}(\tfrac{1}{4}\varphi^4)^{N+1} = \lambda^{N+1}|Z_{N+1}|. \end{aligned}$$

Aus Aufgabe 6c ergibt sich, daß das Restglied R_N ein Minimum bei $N_{\min} \approx (4\lambda)^{-1}$ besitzt.

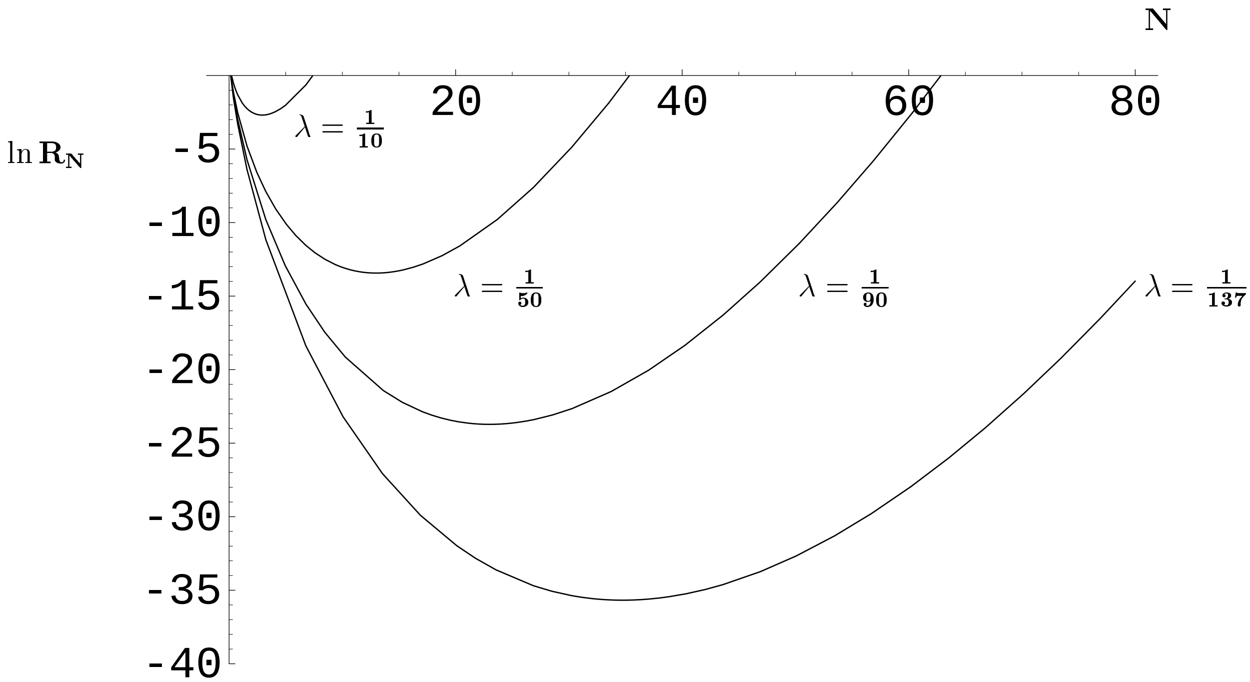

Abbildung 1: $\ln R_N$ für $\lambda = \frac{1}{10}, \frac{1}{50}, \frac{1}{90}, \frac{1}{137}$ als Funktion von N.

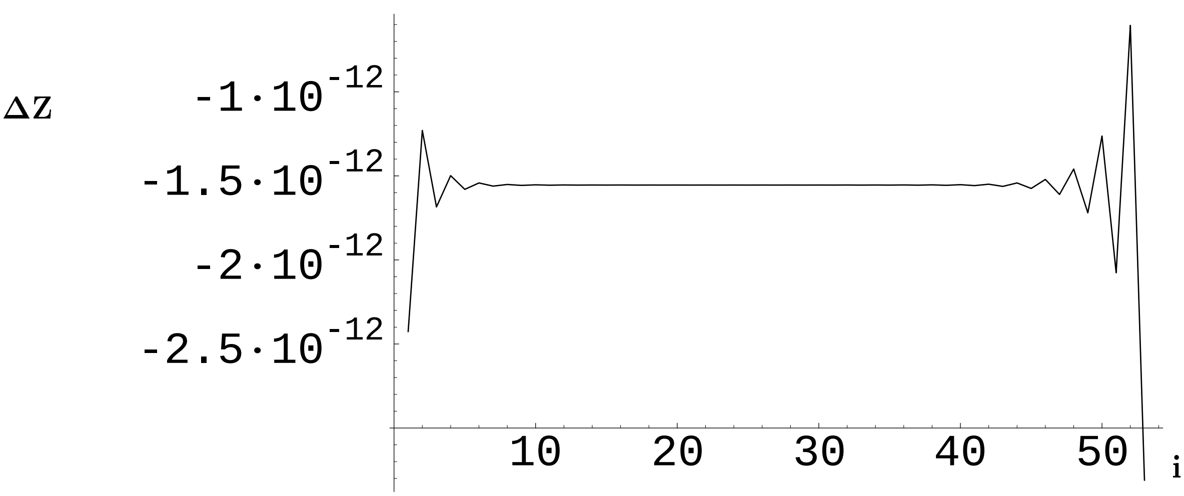

Abbildung 2: Graph der relativen Abweichung $\Delta Z = (Z(\lambda) - \sum_{n=1}^{11+i} Z_n\lambda^n)/Z(\lambda)$ für $\lambda = 1/137$. Das Optimum ist bei $N \approx 34$ ($i \approx 23$)