

Theoretische Physik I: Mechanik

Skript zur Vorlesung Mechanik I von Jan Martin Pawlowski

geschrieben von:

Andreas Bauer
Andreas Dörr
Arne Klein
Thorben Kröger
Paul Müller
Bastian Rieck
Stephan Steinfurt

Korrekturen bitte an theophys@hca.uni-heidelberg.de senden

13. März 2007

Inhaltsverzeichnis

0	Einleitung	5
0.1	Mechanik	5
0.2	Warum Theoretische Physik?	5
1	Newtonsche Mechanik	7
1.1	Bezugssysteme	7
1.2	Dynamik	11
1.3	Newton'sche Axiome	12
1.4	Beispiele	15
2	Erhaltungssätze	21
2.1	Impulserhaltung	21
2.2	Energieerhaltung	21
2.3	Drehimpulserhaltung	22
2.4	Beispiel: Eindimensionale Bewegung (Energiesatz)	23
2.5	Zentralpotential	27
3	Keplerproblem	33
3.1	Virialsatz	34
3.2	Bewegung im Gravitationspotential	35
3.2.1	Direkte Lösung	38
3.2.2	Lösung durch Integration	39
3.2.3	Keplersche Gesetze	41
3.3	Lenz-Runge-Vektor	42
3.4	Relativistische Korrekturen	43
4	Lagrangegleichungen	45
4.1	Verallgemeinerte Koordinaten und Zwangsbedingungen	45
4.1.1	Klassifizierung der Zwangsbedingungen	46
4.1.2	Geometrische Interpretation und Bewegungsgleichungen	48
4.1.3	Zusammenfassung	53
4.2	Geschwindigkeitsabhängige Potentiale	54
4.3	Lagrangegleichung mit Dissipation	56
4.4	Zwangskräfte	56
5	Der Lagrangeformalismus	57
5.1	Variationsrechnung	57
5.2	Hamiltonsches Prinzip	60
5.3	Allgemeine Formulierung und Zwangskräfte	61

6	Symmetrien und Erhaltungssätze	69
6.1	Symmetrien	69
6.2	Erhaltungsgrößen	71
6.3	Noethertheorem	73
7	Starrer Körper	79
7.1	Trägheitsmoment und Trägheitstensor	79
7.1.1	Einfaches Beispiel - Massenpunkt an Stange und Drehung um x_3 -Achse	79
7.1.2	Rotierende Scheibe um x_3 -Achse	80
7.1.3	Allgemein	80
7.1.4	Allgemein bei einer Drehung um die Achse A	80
7.1.5	Allgemeine Bewegung eines starren Körpers	81
7.2	Beschleunigte Bezugssysteme	82
7.2.1	Bewegungsgleichungen im \vec{x} -System	86
7.3	Eigenschaften des Trägheitstensors	86
8	Kreisel	89
8.1	Eulersche Bewegungsgleichungen	89
8.2	Kräftefreier Kreisel	91
8.2.1	Drehimpuls im körperfesten System	91
8.2.2	Bewegung des starren Körpers im raumfesten Intertialsystem	92
8.2.3	Spezialfälle: (un)symmetrischer Kreisel	94
8.3	Eulersche Winkel	95
8.3.1	Zeitabhängige Drehung	98
8.4	Kreisel im Gravitationsfeld	99
9	Hamiltonformalismus	107
9.1	Hamiltonsche Bewegungsgleichungen	108
9.2	Legendretransformation	109
9.3	Poissonklammern	115
9.4	Satz von Lionville	118
10	Kanonische Transformationen	121
10.1	Kanonische Transformationen, Definition	123
10.2	Infinitesimale kanonische Transformationen	125
10.3	Integrable Systeme	126
10.3.1	Konstruktion kanonischer Transformationen:	127
10.4	Hamilton-Jacobi Theorie	129
11	Kontinuumsmechanik	131
11.1	kleine Schwingungen	131
11.2	Lineare Kette	134
11.2.1	Kontinuumslices	135
11.3	Wirkungsprinzip	137
11.4	Schwingende Saite / Membran	138

Kapitel 0

Einleitung

0.1 Mechanik

1. *klassische* Mechanik
 - (a) ohne Quantenmechanik
 - (b) Galileitransformation (euklidisch)
 - (c) Spezielle Relativität
2. Bedeutung für die Theoretische Physik
 - (a) Mechanik hat die Theor. Physik definiert (17tes - 18tes Jahrhundert), danach Thermodyn., Elektrodyn., Quantenmechanik
 - (b) Viele grundlegenden Konzepte wurden in der Mechanik entwickelt, und sind hier am einfachsten und klarsten dargestellt.
 - i. Symetrieprinzip und Erhaltungssätze (Noethertheorem)
 - ii. Lagrange- und Hamiltonformalierung, Prinzip der kleinsten Wirkung
 - i.+ii. Unmittelbare Relevanz in der Quantenmechanik, Quantenstatistik, Quantenfeldtheorie

0.2 Warum Theoretische Physik?

1. Herleitung von Gesetzmäßigkeiten aus (möglichst) wenigen Grundaxiomen ermöglicht Übertragbarkeit und Überprüfbarkeit experimenteller Befunde (Universalität der physikalischen Gesetze)
 2. Konsistenz/Inkonsistenz der möglichen Axiome ermöglicht eindeutige oder zumindest restriktive Voraussagen
- 1.+2. Sehr wirksame und erfolgreiches Herangehen - in unerlässlicher Zusammenarbeit mit dem Experiment - an physikalische Fragestellungen

Kapitel 1

Newton'sche Mechanik

1.1 Bezugssysteme

Die Newton'sche Mechanik beschäftigt sich mit der Beschreibung der Bewegung von Körpern (Systeme von Massenpunkten) im Raum. Dazu wählen wir ein kartesisches Koordinatensystem K :

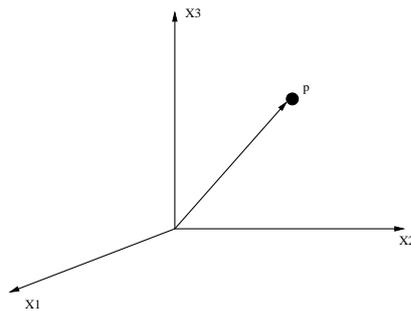


Abbildung 1.1: Kartesisches Koordinatensystem mit Massepunkt

Punkte können durch Vektoren $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ beschrieben werden:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad x_i \text{ mit } i = 1, \dots, 3$$

\mathbb{R}^3 ist ein reeller 3-dimensionaler Vektorraum. Die Wahl von K war beliebig. Messbar sind Distanzen: $d_{AB} = \|\vec{x}_A - \vec{x}_B\| = \sqrt{\sum_i (x_{A_i} - x_{B_i})^2}$ (Euklidische Geometrie)

Wechsel des Bezugssystems: $K \rightarrow K'$

Forderung:

$$d_{AB}(K) = d_{AB}(K') \quad (1.1)$$

Transformation:

$$\vec{x}' = M \cdot \vec{x} - \vec{b}, \quad M \in GL(3), \quad \vec{b} \in \mathbb{R}^3 \quad (1.2)$$

mit

$$\begin{aligned} \|\vec{x}'_A - \vec{x}'_B\| &\stackrel{!}{=} \|\vec{x}_A - \vec{x}_B\| = \|M(\vec{x}_A - \vec{x}_B)\| \\ &= \left(\sum_{i,j,k} M_{ij}(x_{A_j} - x_{B_j}) \cdot M_{ik}(x_{A_k} - x_{B_k}) \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\stackrel{!}{=} \sqrt{\sum_i (x_{A_i} - x_{B_i})^2} \end{aligned} \quad (1.3)$$

und damit

$$M_{ij}M_{ik} = \delta_{jk} \quad (1.4)$$

mit Kroneckersymbol

$$\delta_{jk} = \begin{cases} 1 & j = k \\ 0 & j \neq k \end{cases} \quad (1.5)$$

Es folgt, dass M eine orthogonale Matrix ist, also $M \in O(3)$ mit $M \cdot M^T = 1$ ist.

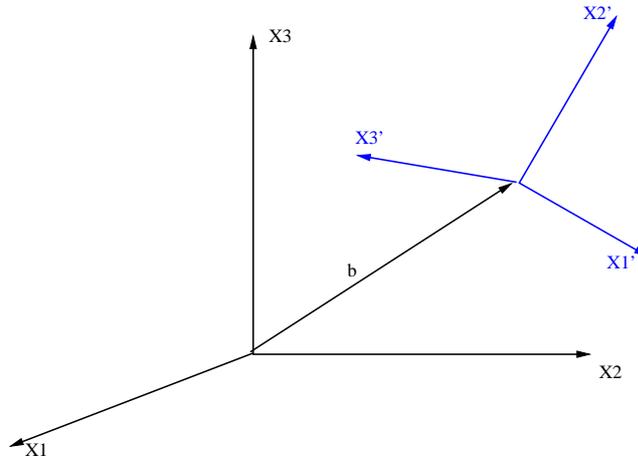


Abbildung 1.2: Transformiertes Kartesisches Koordinatensystem

Die Koordinaten des Ursprungs des neuen Bezugssystems K' im Bezugssystem K sind:

$$x'_i = 0 = \sum_K M_{ik}x_{0k} - b_i \quad (1.6)$$

$$\curvearrowright x_{0k} = \sum_i M_{ki}^{-1}b_i = (M^T \cdot b)_j \quad (1.7)$$

Ab jetzt gilt die Einsteinsche Summenkonvention, die besagt, dass über doppelt auftretende Indizes summiert wird. D.h. z.B. $\sum_i M_{ki}^{-1}b_i \rightarrow M_{ki}^{-1}b_i = M_{ik}b_i$.

Bemerkungen: K' ist ein kartesisches Koordinatensystem, \hat{e}_i ist der Einheitsvektor in x_i Richtung.

$$\hat{e}'_i \perp \hat{e}'_j \tag{1.8}$$

mit

$$(\hat{e}'_i)_k = M_{ki}^T = M_{ik} \tag{1.9}$$

und

$$M \cdot M^T = 1 \tag{1.10}$$

Zeit: Die Messung von zeitlichen Abständen t_{AB} erfolgt mittels Uhren, die synchronisiert werden müssen:

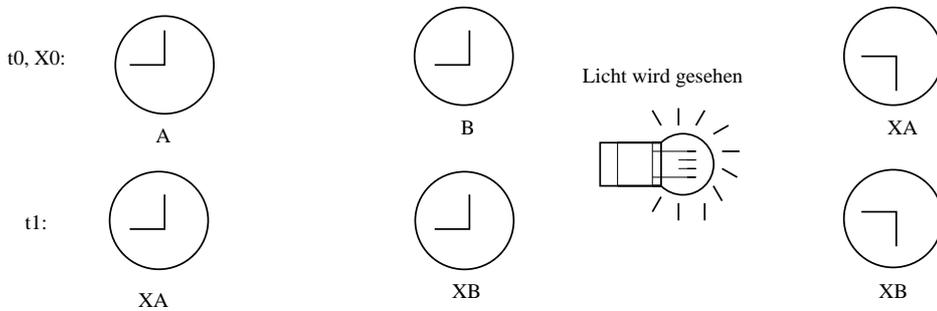


Abbildung 1.3: Messung mit Uhren

Ereignisse: $(t_A, \vec{x}_A); (t_B, \vec{x}_B)$

Zeitlicher Abstand:

$$t_B - t_A \tag{1.11}$$

gleichzeitig:

$$t_B - t_A = 0 \tag{1.12}$$

Wechsel des Bezugssystems: $K \rightarrow K'$

gleichzeitige Ereignisse: $t_A = t_B$

$$\|\vec{x}_A - \vec{x}_B\| = \|\vec{x}'_A - \vec{x}'_B\| \tag{1.13}$$

Transformation:

$$x'_i = M_{ij}(t)x_j - b_i(t) \tag{1.14}$$

$$t' = t - t_0 \tag{1.15}$$

mit

$$M \in O(3), \vec{b} \in \mathbb{R}^3, t_0 \in \mathbb{R} \quad (1.16)$$

Die Trajektorie eines Punktes wird beschrieben durch:

$$\vec{x} = \vec{x}(t) \quad (1.17)$$

Dabei ist die Abbildung

$$t \rightarrow \vec{x} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad (1.18)$$

stetig, da sie eine Abfolge von Ereignissen darstellt.

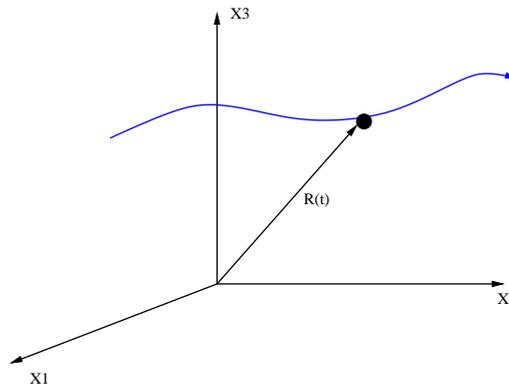


Abbildung 1.4: Trajektorie eines Punktes

Geschwindigkeit:

$$\vec{v}(t) = \frac{d}{dt} \vec{x}(t) = \dot{\vec{x}}(t) \text{ mit } v_i(t) = \dot{x}_i(t) \quad (1.19)$$

Beschleunigung:

$$\vec{a}(t) = \ddot{\vec{x}}(t) = \frac{d^2}{dt^2} \vec{x}(t) \quad (1.20)$$

Im Bezugssystem K' gilt:

$$\frac{d}{dt'} = \frac{d}{dt} \text{ mit } \frac{dt'}{dt} = 1 \quad (1.21)$$

Und damit gilt für die Geschwindigkeit in K' :

$$\begin{aligned}
 \vec{v}'(t') &= \frac{d}{dt'} \vec{x}'(t') \\
 &= \frac{d}{dt} (M(t) \cdot \vec{x}(t) - \vec{b}(t)) \\
 &= M(t) \cdot \vec{v}(t) + \dot{M}(t) \cdot \vec{x}(t) - \dot{\vec{b}}(t) \\
 &= M(t' + t_0) \cdot \vec{v}(t' + t_0) + \dot{M}(t' + t_0) \cdot \vec{x}(t' + t_0) - \dot{\vec{b}}(t' + t_0)
 \end{aligned} \tag{1.22}$$

Für die Beschleunigung in K' gilt:

$$\vec{a}'(t') = M(t) \cdot \vec{a}(t) + 2 \cdot \dot{M}(t) \cdot \vec{v}(t) + \ddot{M}(t) \cdot \vec{x}(t) - \ddot{\vec{b}}(t) \tag{1.23}$$

Bemerkung: Galilei-Transformation: gleichförmig zueinander bewegte Koordinatensysteme

⇒ gleichförmige Bewegung ($\vec{a} = 0$)

Aus

$$\vec{a}'(t') \Big|_{\vec{a}=0} = 2\dot{M}(t)\vec{v}(t) + \ddot{M}(t)\vec{x}(t) - \ddot{\vec{b}}(t) \tag{1.24}$$

folgt

$$\left. \begin{array}{l} \dot{M} = 0 \text{ und } \ddot{\vec{b}} = 0, \\ \text{also } \vec{b}(t) = \vec{b}_0 + \vec{u} \cdot t \end{array} \right\} \text{Gruppe} \tag{1.25}$$

Galilei-Transformation: $\mathcal{G} = (M, \vec{u}, \vec{b})$

$$\vec{x}'(t') = M_0 \vec{x}(t) - \vec{u}t - \vec{b}_0 \tag{1.26}$$

$$\vec{v}'(t') = M_0 \vec{v}(t) - \vec{u} \tag{1.27}$$

$$\vec{a}'(t') = M \cdot \vec{a}(t) \tag{1.28}$$

$$\mathcal{G}'' = \mathcal{G}' \circ \mathcal{G} = (M' \circ M, M' \cdot \vec{u} + \vec{u}', M' \cdot \vec{b} + \vec{b}') \tag{1.29}$$

⇒ Gruppe

1.2 Dynamik

Kinematik: Lehre von der Geometrie der Bewegungen ohne Rücksicht auf deren physikalische Realisierung.

Dynamik: Lehre von den durch Kräfte hervorgerufenen Bewegungen.

Kraft: Ursache einer Bewegungsänderung

- Wird quantifiziert durch einen Kraftvektor:

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix} \text{ z.B.: ABBILDUNG}$$

- Vektoraddition:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 \text{ z.B.: ABBILDUNG}$$

- Messvorschrift:

1. Richtung(en) der Feder(n) und Verlängerung
2. Probekörper im Kraftfeld: z.B. Elektron im EM-Feld

1.3 Newton'sche Axiome

(1687) Wir betrachten Trajektorien $\vec{x}_i(t)$ von Massenpunkten mit Masse m_i (träge Masse)

- **1. Newton'sches Gesetz**

- 1.Version: „Jeder Körper verharrt in seinem Zustand der Ruhe oder der gleichförmigen geradlinigen Bewegung, wenn er nicht durch einwirkende Kräfte gezwungen wird, seinen Bewegungszustand zu ändern“

$$\frac{d}{dt}(mv(t)) = 0 \quad \text{definiert Inertialsystem} \quad (1.30)$$

- 2.Version: Es gibt Inertialsysteme, in denen ein Massepunkt ruht ($\dot{m} = 0$), wenn keine äußere Kraft angreift.
- Relativitätsprinzip der Newton'schen Mechanik: Gesetze der Newton'schen Mechanik sind invariant unter Galileitransformation

- **2. Newton'sches Gesetz**

- 1.Version: „Die Änderung der Bewegung ist der Einwirkung der bewegenden Kraft proportional und geschieht nach der Richtung derjenigen geraden Linie, nach welcher jene Kraft wirkt.“
- 2.Version: In Inertialsystemen gilt

$$\vec{F}_i = \frac{d}{dt}(m_i \dot{\vec{x}}_i) = m_i \ddot{\vec{x}}_i \quad (1.31)$$

wobei das rechte Gleichheitszeichen für $\dot{m} = 0$ gilt.

- **3. Newton'sches Gesetz**

- 1. Version: „Die Wirkung ist stets der Gegenwirkung gleich, oder, die Wirkungen zweier Körper aufeinander sind stets gleich und von entgegengesetzter Richtung.“ („actio=reactio“)
- 2. Version:

$$\vec{F}_{ij}(t) = \vec{F}_{ji}(t) \quad (1.32)$$

mit \vec{F}_{ij} ist Kraft von Massenpunkt i auf j

Konsequenzen: Der Einfachheit halber betrachten wir nur einen Massenpunkt

Bewegungsgleichung:

$$\ddot{\vec{x}} = \frac{1}{m} \vec{F}(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) \quad (1.33)$$

(Eine $\dot{\vec{x}}$ -Abhängigkeit der Kraft liegt z.B. bei der Reibung oder Lorentzkraft vor)

Dies ergibt 3 Differentialgleichungen 2.Ordnung. Man kann dies aber auch auf 6 Differentialgleichungen 1.Ordnung reduzieren, was oft einfacher zu lösen ist. Hierzu definieren wir:

$$\vec{y} = \dot{\vec{x}} \quad (1.34)$$

$$\Rightarrow \dot{\vec{y}} = \frac{1}{m} \vec{F}(\vec{x}, \vec{y}, t) \quad (1.35)$$

Dies ergibt nun 6 Differentialgleichungen 1.Ordnung.

Verallgemeinerung:

$$(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \dots, \vec{x}_n, \vec{y}_n) = (\vec{z}_1, \dots, \vec{z}_{2n}) \quad (1.36)$$

mit

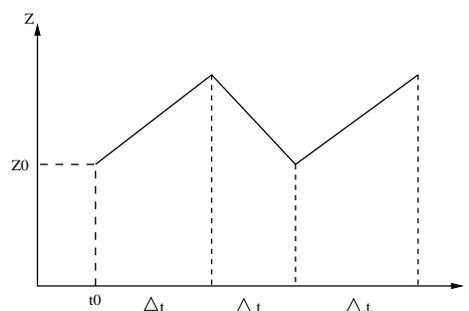
$$\begin{aligned} \dot{\vec{z}} &= \vec{f}(\vec{z}, t) \\ \vec{f}_{2i+1} &= \vec{z}_{2i+1} \\ \vec{f}_{2i} &= \vec{F}_i \frac{1}{m_i} \end{aligned} \quad (1.37)$$

Existenz- und Eindeutigkeitsatz

Seien t_0 und \vec{z}_0 gegeben. Dann existiert in einer Umgebung U von t_0 eine eindeutig Lösung von 1.37 mit $\vec{z}(t_0) = \vec{z}_0$, falls \vec{f} in U stetig differenzierbar ist.

Heuristisch: $\dot{z} = f(z, t)$ (siehe Abbildung)

Differenzierbarkeit: $\Delta t \rightarrow 0$ möglich



- Integration entlang einer Trajektorie:

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} dt \vec{F}(t) &= m \cdot \int_{t_0}^{t_1} dt \dot{\vec{v}} = m\vec{v}(t_1) - m\vec{v}(t_0) \\ &= \vec{p}(t_1) - \vec{p}(t_0) \text{ mit } \vec{p} = m\vec{v} \end{aligned} \quad (1.38)$$

- Arbeit:

$$\begin{aligned} A(t_1, t_0) &= \int_{t_0}^{t_1} \vec{v} \cdot \vec{F} dt = m \cdot \int_{t_0}^{t_1} \vec{v} \cdot \dot{\vec{v}} dt \\ &= \frac{1}{2} m v(t_1)^2 - \frac{1}{2} m v(t_0)^2 \end{aligned} \quad (1.39)$$

mit kinetischer Energie $T = \frac{1}{2} m v^2$

- Kraftfelder:

$$\vec{F}(t) = \vec{K}(\vec{x}(t)) \quad (1.40)$$

Konservativ:

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} V \quad (1.41)$$

mit Potential V . Damit gilt für Konservative Kräfte die Integrabilitätsbedingung:

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x_i} F_j = \frac{\partial}{\partial x_j} F_i \quad \forall i, j} \quad (1.42)$$

mit

$$-\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} V = \frac{\partial}{\partial x_i} F_j \quad \text{und} \quad -\frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i} V = \frac{\partial}{\partial x_j} F_i \quad (1.43)$$

Einschub:

Die Integrabilitätsbedingung (1.42) kann auch als

$$\varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} F_k = 0 \quad \forall i \quad (1.44)$$

formuliert werden. Der ε -Tensor ist definiert durch

$$\varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{jik} = -\varepsilon_{ikj} \quad , \quad i, j, k = 1, 2, 3 \quad (1.45)$$

Er ist total antisymmetrisch, und es gilt:

$$\varepsilon_{123} = 1 \quad (1.46)$$

Der ε -Tensor (Levi-Civita) ist z.B. nützlich bei der Darstellung von Kreuzprodukten:

$$(\vec{v} \times \vec{w})_i = \varepsilon_{ijk} v_j w_k \quad (1.47)$$

Ende Einschub

Kräfte \vec{F} , die die Integrabilitätsbedingung (1.42) $\varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} F_k = 0$ erfüllen, sind konservativ [in einfach zusammenh. Gebieten]. Für den Beweis definieren wir

$$V_{\zeta_1}(\vec{x}) = - \int_{\zeta_1} \vec{F} \cdot d\vec{l} \quad \text{mit} \quad (1.48)$$

ABBILDUNG

V ist wegunabhängig! (aber \vec{x}_0 -abhängig)

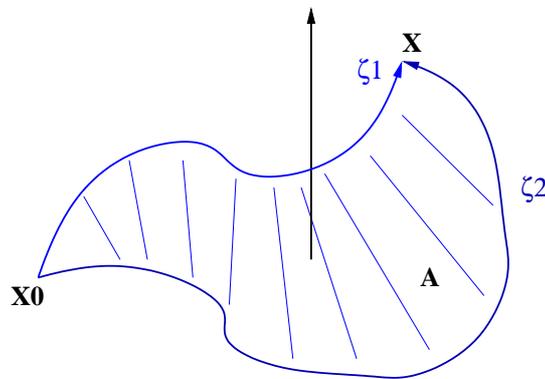


Abbildung 1.5: Beispiel für Wege unter konservativen Kräften

Dazu berechnen wir

$$\begin{aligned} V_{\zeta_1}(\vec{x}) - V_{\zeta_2}(\vec{x}) &= - \int_{\zeta_1} \vec{F} \cdot d\vec{l} + \int_{\zeta_2} \vec{F} \cdot d\vec{l} \\ &= - \oint \vec{F} \cdot d\vec{l} \\ &\stackrel{Stokes}{=} - \int_A (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot d\vec{A} \end{aligned} \quad (1.49)$$

[einfach zusammenhängend] \neq ABBILDUNG

Damit gilt:

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}V(\vec{x}) = +\vec{\nabla} \int_{\vec{x}_0}^{\vec{x}} \vec{F} d\vec{l} = \vec{F} \quad (1.50)$$

1.4 Beispiele

1. **Freier Fall mit Reibung** (Newton-Reibung): Dies stellt ein eindimensionales Problem dar:

$$F_R = \|\vec{F}_R\| \quad , \quad F_g = \|\vec{F}_g\| \text{ ABBILDUNG} \quad (1.51)$$

Reibung

$$F_R = c \cdot v^2 \quad (\text{Luft}) \quad (1.52)$$

Gravitation

$$F_g = m \cdot g \quad (1.53)$$

Bewegungsgleichung:

$$mg - c\dot{x}^2 = m\ddot{x} \quad (1 \text{ Differentialgleichung } 2.\text{ Ordnung}) \quad (1.54)$$

Übergang zu 2 Differentialgleichungen 1. Ordnung mit $v = \dot{x}$:

$$mg - cv^2 = m\dot{v} \rightarrow dt = \frac{dv}{g - \frac{cv^2}{m}} = \frac{dv}{2g} \left(\frac{1}{1 - \sqrt{\frac{c}{mg}}v} + \frac{1}{1 + \sqrt{\frac{c}{mg}}v} \right) \quad (1.55)$$

Es folgt mit $\int_0^{t_1} dt$ und $\int_0^{v_1}$ mit Anfangsbedingung $t_0 = 0$, $v_0 = 0$ mit $v_1 = v(t_1)$:

$$2t_1 = \sqrt{\frac{m}{cg}} \ln \frac{1 + \sqrt{\frac{c}{mg}}v_1}{1 - \sqrt{\frac{c}{mg}}v_1} \quad (1.56)$$

und damit ($t_1 = t$, $v_1 = v$)

$$\exp\left(\frac{2t}{\sqrt{\frac{m}{cg}}}\right) = \frac{1 + \sqrt{\frac{c}{mg}}v}{1 - \sqrt{\frac{c}{mg}}v} \quad (1.57)$$

$$\Leftrightarrow v = \sqrt{\frac{mg}{c}} \left(1 - \frac{2}{\exp\left(\frac{2t}{\sqrt{\frac{m}{cg}}}\right) + 1} \right) \quad (1.58)$$

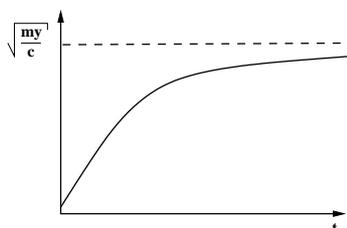


Abbildung 1.6: Geschwindigkeit beim freien Fall

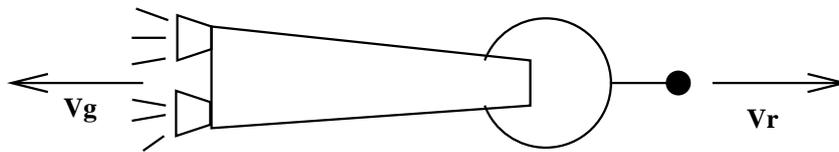


Abbildung 1.7: Raketenantrieb

2. Raketenantrieb

Keine äußeren Kräfte

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_i m_i v_i \right) = 0 \quad (1.59)$$

Infinitesimal: $v_s = \|\vec{v}_g\|$, $v_R = \|\vec{v}_R\|$

$$- dm \cdot \vec{v}_g + m d\vec{v}_R = 0 \quad (1.60)$$

$$\curvearrowright + \dot{m} v_g + m \dot{v}_R = 0 \quad (1.61)$$

oder

$$- \frac{dm}{m} = \frac{1}{dv_R} \quad (1.62)$$

Integriere $\int_{m_0}^{m_1}$ und $\int_0^{v_1}$ mit $v_{R_1} = v(m_1)$ und es folgt

$$\ln \frac{m_1}{m_0} = - \frac{v_{R_1}}{v_g} \curvearrowright v_R = -v_g \ln \frac{m}{m_0} \quad (1.63)$$

$$(1.64)$$

Technische Verwirklichung: (z.B. Gerthsen)

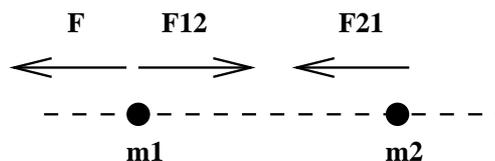
$$v_g \sim 10^3 - 10^4 \frac{m}{s} \quad (\text{bei } 10^{50} C) \quad (1.65)$$

$$\frac{m_0}{m} \sim 6 \quad (1.66)$$

Kreisbahngeschwindigkeit: $7,9 \cdot 10^3 \frac{m}{s}$
 Fluchtgeschwindigkeit: $11,2 \cdot 10^3 \frac{m}{s}$

3. Starr verbundene Massenpunkte

(a) 2 Massenpunkte auf Schiene



F : äußere Kraft auf m_1
Bewegungsgleichungen:

$$m_1 \ddot{x}_1 = F + F_{12} \quad (1.67)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 = -F_{12} \quad (1.68)$$

$$x_1 - x_2 = \text{const.} \quad \text{Zwangsbedingung} \quad (1.69)$$

Es gilt $\ddot{x}_1 = \ddot{x}_2$

$$\hookrightarrow \frac{1}{m_1}(F + F_{12}) = -\frac{1}{m_2}F_{12} \quad (1.70)$$

$$F_{12} = -\frac{m_2}{m_1 + m_2}F \quad (1.71)$$

$$\ddot{x}_1 = \frac{1}{m_1 + m_2}F \quad (1.72)$$

(b) 2 Massenpunkte im 3-dimensionalen Raum ABBILDUNG

$$m_1 \ddot{\vec{x}}_1 = \vec{F} + \vec{F}_{12} \quad (1.73)$$

$$m_2 \ddot{\vec{x}}_2 = -\vec{F}_{12} \quad (1.74)$$

$$\|\vec{x}_1 - \vec{x}_2\| = \text{const.} \quad (\text{Zwangsbedingung}) \quad (1.75)$$

$$\vec{F}_{12} = c \cdot (\vec{x}_1 - \vec{x}_2) \quad (1.76)$$

Schwerpunkt:

$$\vec{x}_S = \frac{m_1 \vec{x}_1 + m_2 \vec{x}_2}{m_1 + m_2} \quad (1.77)$$

$$(1.73)+(1.74) : \ddot{\vec{x}}_S = \frac{1}{m_1 + m_2} \vec{F} \quad (1.78)$$

Relativkoordinaten:

$$\vec{x}_{12} = \vec{x}_1 - \vec{x}_2 \quad (1.79)$$

$$\Delta \vec{x}_i = \vec{x}_i - \vec{x}_S \quad (1.80)$$

[Koordinatensystem in \vec{x}_S]

Bewegungsgleichung:

$$\Delta \ddot{\vec{x}}_1 = \frac{1}{m_1} \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{F} + \vec{F}_{12} \right) \quad (1.81)$$

$$\Delta \ddot{\vec{x}}_2 = -\frac{1}{m_2} \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{F} + \vec{F}_{12} \right) \quad (1.82)$$

$$\ddot{\vec{x}}_{12} = \frac{1}{m_1} \vec{F} + \frac{m_1 + m_2}{m_1 \cdot m_2} \vec{F}_{12} \quad (1.83)$$

Arbeit:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i=1}^2 \int_{t_1}^{t_2} dt \dot{\vec{x}}_i \cdot (m_i \ddot{\vec{x}}_i) \\
 &= \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\dot{\vec{x}}_1 \cdot \vec{F} + \underbrace{\vec{F}_{12} \cdot (\dot{\vec{x}}_1 - \dot{\vec{x}}_2)}_0 \right) \\
 &= \int_{t_1}^{t_2} dt \dot{\vec{x}}_1 \cdot \vec{F} \\
 & \left[= \int_{t_1}^{t_2} dt \dot{\vec{x}}_S (m_1 + m_2) \ddot{\vec{x}}_S + \sum_{i=1}^2 \int_{t_1}^{t_2} dt \Delta \dot{\vec{x}}_i \cdot (m_i \Delta \ddot{\vec{x}}_i) \right]
 \end{aligned} \tag{1.84}$$

Zwangskraft \vec{F}_{s12} verrichtet keine Arbeit

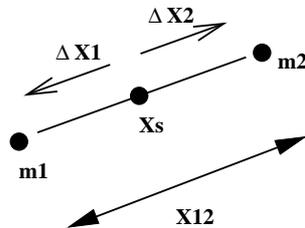


Abbildung 1.8: Schwerpunkt zweier Massepunkte

Kapitel 2

Erhaltungssätze

2.1 Impulserhaltung

Ohne äußere Kräfte $\vec{F}_{ext} = 0$ gilt für ein System von Massepunkten m_i

$$\vec{p} = \sum_i \vec{p}_i = \text{konst.} \quad (2.1)$$

d.h.

$$\dot{\vec{p}} = 0 \quad (2.2)$$

Beweis:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{p}} &= \sum_i \frac{d}{dt} \vec{p}_i = \sum_i \vec{F}_i = \sum_{i,j} \vec{F}_{ij} \\ &= \sum_{i<j} \vec{F}_{ij} + \sum_{j<i} \vec{F}_{ij} = \sum_{i<j} (\vec{F}_{ij} + \vec{F}_{ji}) \\ &= 0 \quad (3. \text{ Axiom}) \end{aligned} \quad (2.3)$$

Korollar:

$$\dot{\vec{p}} = \vec{F}_{ext} \quad (2.4)$$

2.2 Energieerhaltung

Für konservative Kräfte $\vec{F} = -\vec{\nabla}V$ ist die Gesamtenergie eines Massenpunktes ($\dot{m} = 0$) erhalten, es gilt also:

$$E = T + V = \frac{1}{2} m \dot{\vec{x}}^2 + V(\vec{x}) = \text{konst.} \quad (2.5)$$

Beweis:

$$\begin{aligned}\dot{E} &= \frac{1}{2}2m\dot{\vec{x}}\ddot{\vec{x}} + \frac{dx}{dt} \frac{\partial V}{\partial x_i} = \underbrace{m\dot{\vec{x}}\ddot{\vec{x}}}_{\dot{\vec{x}}\vec{F}} + \dot{\vec{x}} \underbrace{\vec{\nabla}V}_{-\vec{F}} \\ &= \dot{\vec{x}}\vec{F} - \dot{\vec{x}}\vec{F} = 0\end{aligned}\tag{2.6}$$

System von Massenpunkten:

Für konservative Kräfte mit Potential $V(\vec{x})$ und Potentialen $V_{ij}(\|\vec{x}_i - \vec{x}_j\|)$ zwischen den Massenpunkten m_i und m_j , mit $V_{ij} = V_{ji}$ ist die Gesamtenergie erhalten,

$$E = \sum_i (T_i + V(\vec{x}_i)) + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} V_{ij} = \text{konst.}\tag{2.7}$$

In dem System greifen an den Massenpunkte m_i die Kräfte \vec{F}_i mit

$$\vec{F}_i = \vec{F}_{vi} + \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij}\tag{2.8}$$

mit

$$\vec{F}_{vi} = -\vec{\nabla}_i V(\vec{x}_i), \quad \vec{F}_{ij} = -\vec{\nabla}_i V_{ij}(\|\vec{x}_i - \vec{x}_j\|) = -\vec{F}_{ji}\tag{2.9}$$

an. Es gilt $(\vec{\nabla}_i)_a = \frac{\partial}{(\partial \vec{x}_i)_a}$, und $i, j = 1, \dots, n$ indiziert die Massenpunkte; $a, b = 1, 2, 3$ indiziert die Koordinaten.

Beweis:

$$\begin{aligned}\dot{E} &= \sum_i \left[\underbrace{(m_i \dot{\vec{x}}_i \ddot{\vec{x}}_i)}_{\dot{\vec{x}}_i (\vec{F}_{vi} + \sum_{i \neq j} \vec{F}_{ij})} + \dot{\vec{x}}_i \underbrace{\vec{\nabla}_i V}_{-\vec{F}_{vi}} \right] + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \left[\underbrace{\dot{\vec{x}}_i \vec{\nabla}_i}_{(\dot{\vec{x}}_i)_a \frac{\partial}{\partial (\vec{x}_i)_a}} V_{ij} + \dot{\vec{x}}_j \underbrace{\vec{\nabla}_j V_{ij}}_{-\vec{F}_{ji}} \right] \\ &= \sum_{i \neq j} [\dot{\vec{x}}_i \vec{F}_{ij} - \dot{\vec{x}}_i \vec{F}_{ij}] = 0\end{aligned}\tag{2.10}$$

2.3 Drehimpulserhaltung

Für Kräfte $\vec{F}_{ij} = c(\vec{x}_i - \vec{x}_j)$ parallel der Verbindungslinie gilt Drehimpulserhaltung,

$$\vec{L} = \sum_i m_i \vec{x}_i \times \dot{\vec{x}}_i = \sum_i \vec{x}_i \times \vec{p}_i = \text{konst.}\tag{2.11}$$

\vec{L} ist ein Pseudo- oder Axialer Vektor, da er unter Spiegelungen ($\vec{x} \rightarrow -\vec{x}$) invariant ist, sich unter Drehungen jedoch wie ein Vektor transformiert.

Beweis:

$$\begin{aligned}
 \dot{\vec{L}} &= \sum_i (\dot{\vec{x}}_i \times \vec{p}_i + \vec{x}_i \times \dot{\vec{p}}_i) \\
 &= \sum_i m_i \underbrace{\varepsilon_{abc} x_{i_b} \dot{x}_{i_c}}_{=0} + \sum_i \vec{x}_i \times \vec{F}_i \\
 &= \sum_{i \neq j} \vec{x}_i \times \vec{F}_{ij} = \sum_{i < j} (\vec{x}_i \times \vec{F}_{ij} + \vec{x}_j \times \vec{F}_{ji}) = 0
 \end{aligned} \tag{2.12}$$

2.4 Beispiel: Eindimensionale Bewegung (Energiesatz)

Im Allgemeinen gilt:

$$m\ddot{x}(t) = F(t) \tag{2.13}$$

mit $x(t_0) = x_0$, und $\dot{x}(t_0) = v_0$

Integration:

$$\dot{x}(t) = v_0 + \frac{1}{m} \int_{t_0}^t dt' F(t') \tag{2.14}$$

$$x(t) = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{m} \int_{t_0}^t dt' \int_{t_0}^{t'} dt'' F(t'') \tag{2.15}$$

konservative Kraft

$$F(t) = -\frac{dV}{dx}(x(t)) \tag{2.16}$$

Damit ist $F = F(x(t))$ und obige Integration erfordert Kenntnis von $x(t)$. Energiesatz:

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2(t) + V(x(t)) \quad \text{mit } E = \text{konst.} \tag{2.17}$$

und damit Dgl. 1. Ordnung

$$\dot{x}(t) = \pm \sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x(t)))} \tag{2.18}$$

Integration über die rechte Seite liefert $x(t)$; Separation der Variablen:

$$dt' = \pm \frac{dx'}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x'))}} \tag{2.19}$$

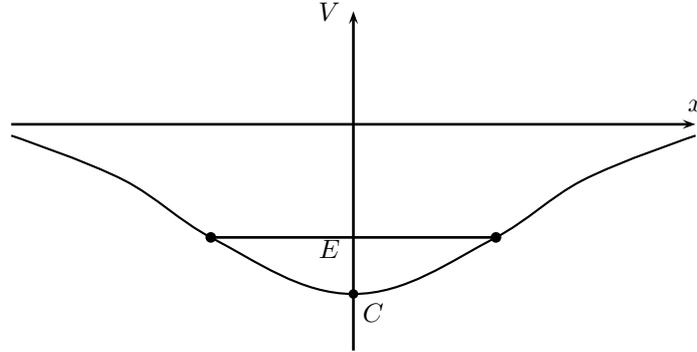
Integration von $\int_{t_0}^t dt'$ und $\int_{x_0}^x dx' \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x'))}}$ mit $x_0 = x(t_0)$ und $x = x(t)$.

Es folgt:

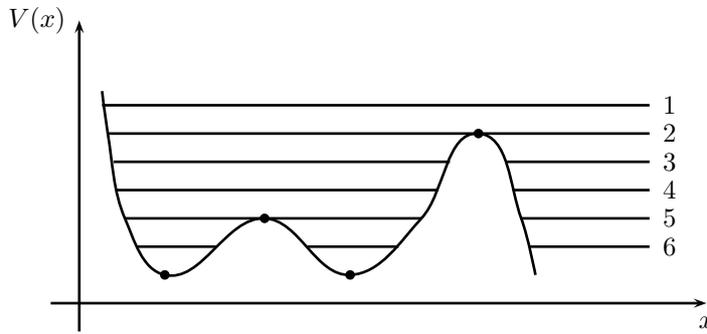
$$t = t_0 \pm \int_{x_0}^x \frac{dx'}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x'))}} \tag{2.20}$$

Das entspricht einer Lösung $t(x, x_0)$: Die Zeit $t(x, x_0) - t_0$ ist die Zeit, die von x_0 nach x benötigt wird.

Beispiel: $V = -\frac{c}{x^2+1}$



Diskussion des allgemeinen Falls
 Phasenraum: ABBILDUNG mit $p = \pm\sqrt{2m(E - V(x))}$



Stationäre Punkte x_f (Fixpunkte): $V'(x_f) = 0$ und $E = V(x_f)$

stabile Fixpunkte: $V''(x_f) > 0$

instabile Fixpunkte: $V''(x_f) < 0$

Umkehrpunkte x_0 : $V(x_0) = E$ und $V'(x_0) \neq 0$

Im Allgemeinen kann das Integral 2.20 $t = t_0 \pm \int_{x_0}^x \frac{dx'}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x'))}}$ nicht gelöst werden. In Umgebungen von Fix- und Umkehrpunkten ist jedoch eine Lösung mittels Taylorentwicklung möglich.

Umkehrpunkt: $V(x_0) = E, \quad V'(x_0) < 0, \quad x_0 = x(t)$ ABBILDUNG

$$V(x) = E - |V'(x_0)|(x - x_0) + \dots \tag{2.21}$$

$$p(x) = \pm\sqrt{2m|V'(x_0)|(x - x_0)} \tag{2.22}$$

2.4. BEISPIEL: EINDIMENSIONALE BEWEGUNG (ENERGIESATZ) 25

Es folgt ($x - x_0 > 0$)

$$t = t_0 + \int_{x_0}^x \frac{dx'}{\sqrt{\frac{2}{m}|V'(x_0)|(x-x_0)}} + \dots = t_0 + \sqrt{\frac{2m}{|V'(x_0)|}}(x-x_0) + \dots \quad (2.23)$$

Auflösen nach x:

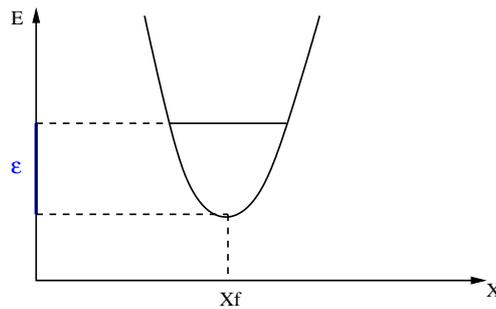
$$x(t) = x_0 + \frac{|V'(x_0)|}{2m}(t-t_0)^2 + O(t-t_0)^3 \quad (2.24)$$

Beschleunigte Bewegung mit Kraft

$$F = |V'(x_0)| \quad (2.25)$$

$$\Rightarrow \text{direkt aus } V = E - |V'(x_0)|(x-x_0) \curvearrowright F(x) = -V'(x) = |V'(x_0)| \quad (2.26)$$

Stabiler Fixpunkt: $V'(x_f) = 0$, $V''(x_f) > 0$



$$V(x) = \underbrace{E - \varepsilon}_{V(x_f)} + \frac{1}{2}V''(x_f)(x-x_f) + \dots \quad (2.27)$$

Energieerhaltung:

$$E = \frac{p^2}{2m} + E - \varepsilon + \frac{1}{2}V''(x_f)(x-x_f)^2 \quad (2.28)$$

$$\Rightarrow \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}V''(x_f)(x-x_f)^2 = \varepsilon \quad (2.29)$$

Kraft:

$$F(x) = -V''(x_f)(x-x_f) \quad (2.30)$$

Bewegungsgleichung:

$$m\ddot{x}(t) = -V''(x_f)\underbrace{(x(t) - x_f)}_{\Delta x(t)} \quad (2.31)$$

oder

$$m\Delta\ddot{x}(t) = -V''(x_f)\Delta x(t) \quad (2.32)$$

Schwingungsgleichung, harmonischer Operator

Lösung:

$$x(t) = x_f + A \cos(\omega t + \varphi) \quad (2.33)$$

$$\frac{1}{m}p(t) = -A\omega \sin(\omega t + \varphi) \quad (2.34)$$

mit Amplitude A und Frequenz $\omega = \sqrt{\frac{1}{m}V''(x_f)}$

$$x(t_0) = x_f \Rightarrow x(t) = x_f + A \sin(\omega(t - t_0)) \quad (2.35)$$

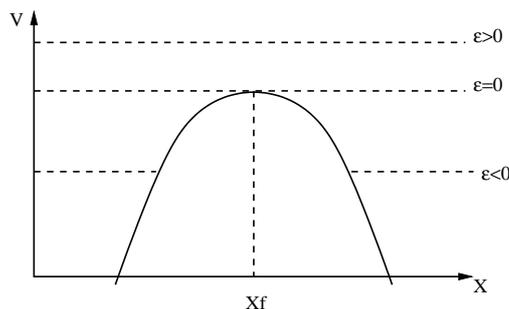
Energie:

$$\begin{aligned} E &= \frac{p^2}{2m} + V(x_f) + \frac{1}{2}V''(x_f)(x - x_f)^2 \\ &= V(x_f) + \frac{1}{2}A^2V''(x_f)(\sin^2(\omega t + \varphi) + \cos^2(\omega t + \varphi)) \\ &= V(x_f) + \frac{1}{2}A^2V''(x_f) \end{aligned} \quad (2.36)$$

E gegeben:

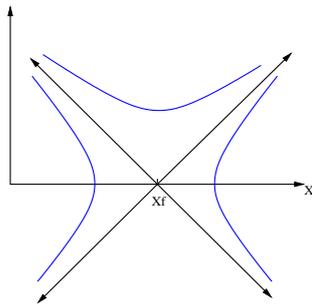
$$A^2 = \frac{2\varepsilon}{V''(x_f)} \quad (2.37)$$

Instabiler Fixpunkt: $V'(x_f) = 0$, $V''(x_f) < 0$



mit $\varepsilon = E - V(x_f)$
Bewegungsgleichung

$$\begin{aligned} m\ddot{x}(t) &= -V''(x_f)(x(t) - x_f) \\ &= |V''(x_f)|(x(t) - x_f) \end{aligned} \quad (2.38)$$



Lösung: (formal wie bei stabilem Fixpunkt)

$$x(t) = x_f + A \cos(\omega t + \varphi) \quad (2.39)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{mV''(x_f)}} = i\sqrt{\frac{1}{m}|V''(x_f)|} \quad (2.40)$$

$$A = \sqrt{\frac{2\varepsilon}{V''(x_f)}} \quad (2.41)$$

1. $\varepsilon > 0$: $x(t_0) = x_f$ ABBILDUNG

$$x(t) = x_f \pm |A| \sinh(|\omega|(t - t_0)) \quad (2.42)$$

$$\pm : \dot{x}(t_0) = x_f \pm |A| \quad (2.43)$$

2. $\varepsilon < 0$: $x(t_0) = x_f \pm A$ ABBILDUNG

$$x(t) = x_f \pm A \cosh(|\omega|(t - t_0)) \quad (2.44)$$

ABBILDUNG

3. $\varepsilon = 0$: ABBILDUNG

$$A = 0 \quad (2.45)$$

2.5 Zentralpotential

Wir betrachten zwei Massenpunkte mit Massen m_1 und m_2 und Kräfte $F_{12} = -\vec{\nabla}_1 V(\|\vec{x}_1 - \vec{x}_2\|) = -\vec{F}_{21}$. Relevante Beispiele sind: $r = \|\vec{x}_{12}\| = \|\vec{x}_1 - \vec{x}_2\|$

- Gravitationspotential

$$V(r) = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r} \quad (2.46)$$

- Coulombpotential

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r} \quad (2.47)$$

Wir haben:

1. Impulserhaltung
2. Energieerhaltung
3. Drehimpulserhaltung

Bewegungsgleichungen:

$$m_1 \ddot{\vec{x}}_1 = \vec{F}_{12} \quad (2.48)$$

$$m_2 \ddot{\vec{x}}_2 = \vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12} \quad (2.49)$$

$$(1) \quad \vec{P} = m_1 \dot{\vec{x}}_1 + m_2 \dot{\vec{x}}_2 \quad (2.50)$$

$$\text{mit } \dot{\vec{P}} = 0 \quad (2.51)$$

$$(2) \quad E = \frac{1}{2} m_1 \dot{\vec{x}}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{\vec{x}}_2^2 + V(\|\vec{x}_{12}\|) \quad (2.52)$$

$$\text{mit } \dot{E} = 0 \quad (2.53)$$

$$(3) \quad \vec{L} = m_1 \vec{x}_1 \times \dot{\vec{x}}_1 + m_2 \vec{x}_2 \times \dot{\vec{x}}_2 \quad (2.54)$$

$$\text{mit } \dot{\vec{L}} = 0 \quad (2.55)$$

Aus (1) folgt, dass der Schwerpunkt

$$\vec{x}_s = \frac{m_1 \vec{x}_1 + m_2 \vec{x}_2}{M} \quad (2.56)$$

mit Gesamtmasse $M = m_1 + m_2$ sich gleichförmig bewegt: (siehe 3)

$$\ddot{\vec{x}}_s = 0 \quad \leadsto \quad \vec{x}_s = \vec{x}_0 + \vec{v}_s t \quad (2.57)$$

Bewegungsgleichung für Relativkoordinate $\vec{r} = \vec{x}_{12}$

$$m \ddot{\vec{r}} = \vec{F}_{12}(\vec{r}) \quad \text{mit reduzierter Masse } m = \frac{m_1 m_2}{M} \quad (2.58)$$

Es gilt

$$\vec{x}_1 = \vec{x}_s + \frac{m_2}{M} \vec{r} \quad (2.59)$$

$$\vec{x}_2 = \vec{x}_s - \frac{m_1}{M} \vec{r} \quad (2.60)$$

und damit

$$E = \frac{1}{2} M \dot{\vec{v}}_s^2 + \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2 + V(r) \quad (2.61)$$

$$L = M \vec{x}_s \times \dot{\vec{v}}_s + m \vec{r} \times \dot{\vec{r}} \quad (2.62)$$

mit

$$\begin{aligned} \vec{L} &= m_1 \vec{x}_1 \times \dot{\vec{x}}_1 + m_2 \vec{x}_2 \times \dot{\vec{x}}_2 \\ &= m_1 \left(\vec{x}_s + \frac{m_2}{M} \vec{r} \right) \times \left(\dot{\vec{v}}_s + \frac{m_2}{M} \dot{\vec{r}} \right) + m_2 \left(\vec{x}_s - \frac{m_1}{M} \vec{r} \right) \times \left(\dot{\vec{v}}_s - \frac{m_1}{M} \dot{\vec{r}} \right) \\ &= m_1 \vec{x}_s \times \dot{\vec{v}}_s + m \vec{r} \times \dot{\vec{r}} \frac{m_2}{M} + m (\vec{x}_s \times \dot{\vec{r}} + \dot{\vec{x}}_s \times \vec{r}) \\ &\quad + m_2 \vec{x}_s \times \dot{\vec{v}}_s + m \vec{r} \times \dot{\vec{r}} \frac{m_1}{M} - m (\vec{x}_s \times \dot{\vec{r}} + \dot{\vec{x}}_s \times \vec{r}) \end{aligned} \quad (2.63)$$

Auswerten von (2) und (3):

$$(2): \dot{E} = 0 = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \dot{r}^2 + V(r) \right) \quad (2.64)$$

wegen $\dot{v}_s = 0$

$$\varepsilon = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + V(r) \text{ mit } \dot{\varepsilon} = 0, \varepsilon = E - \frac{1}{2} M \dot{r}^2 \text{ KORRIGIEREN???$$

$$(2.65)$$

Reduktion auf 1-dim Problem möglich!?

$$(3): \dot{L} = 0 = \frac{d}{dt} (m \vec{r} \times \dot{\vec{r}}) = 0 \quad (2.66)$$

wegen $\dot{v}_s = 0$: $\frac{d}{dt} (\vec{x}_s \times \vec{v}_s) = \vec{v}_s \times \vec{v}_s = 0$ und damit:

$$\vec{l} = m \vec{r} \times \dot{\vec{r}} \text{ mit } \dot{\vec{l}} = 0 \quad (2.67)$$

dass heißt

$$\vec{r} \times \ddot{\vec{r}} = 0 \quad (2.68)$$

$$\vec{l} \vec{r} = 0, \vec{l} \dot{\vec{r}} = 0 \quad (2.69)$$

⇒ Die Bewegung erfolgt in der Ebene senkrecht zu \vec{l} (\vec{l} Normalenvektor)

Geeignetes Koordinatensystem: $\vec{l} \parallel \hat{e}_3$

$$\vec{l} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l \end{pmatrix} \quad (2.70)$$

Außerdem hängt v nur vom Radius $r = \|\vec{x}_{12}\|$ ab:

$$R = (x_{11} - x_{21})^2 + (x_{12} - x_{22})^2 \quad (2.71)$$

⇒ Polarkoordinaten

$$x_1 = r \cos \varphi \quad (2.72)$$

$$x_2 = r \sin \varphi \quad (2.73)$$

mit

$$\dot{x}_1 = \dot{r} \cos \varphi - r \dot{\varphi} \sin \varphi \quad (2.74)$$

$$\dot{x}_2 = \dot{r} \sin \varphi + r \dot{\varphi} \cos \varphi \quad (2.75)$$

$$\curvearrowright \dot{r}^2 = \dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 \quad (2.76)$$

und damit, mit $l = \|\vec{l}\|$, $\hat{e}_r = \frac{\vec{r}}{r} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$

$$E = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m r^2 \dot{\varphi}^2 + V(r) \quad (2.77)$$

$$L = m r^2 \dot{\varphi} \quad (2.78)$$

mit $\dot{\vec{r}} = \frac{d}{dt}(r\hat{e}_r) = \dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\hat{e}}_r$, $\dot{\hat{e}}_r = \dot{\varphi} \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$: $\hat{e}_r \times \dot{\hat{e}}_r = \dot{\varphi} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

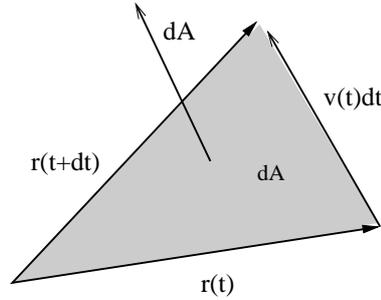
Aus (3):

1.

$$\frac{1}{2}mr^2\dot{\varphi}^2 = \frac{l^2}{2mr^2} \quad \text{mit } \dot{l} = 0 \quad (2.79)$$

2. Flächensatz (2. Keplersches Gesetz) aus $\dot{l} = 0$: „ $\vec{r}(t)$ überstreicht in einem Zeitintervall dt die fixe Fläche dA “

$$d\vec{A} = \frac{1}{2}\vec{r} \times \dot{\vec{r}}dt = \frac{1}{2m}\vec{l}dt \quad (2.80)$$



Wir haben eine 1-dim Bewegung, wegen (1):

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + V_{eff}(r) \quad (2.81)$$

mit

$$V_{eff}(r) = \frac{l^2}{2mr^2} + v(r) \quad (2.82)$$

Integration der Bewegungsgleichung $m\ddot{r} = -\frac{\partial V'_{eff}(r)}{\partial r} = V'_{eff}(r)$

1. Kreisbahn: $E_0 = V_{eff}(r_f)$ und $V'_{eff}(r_f) = mr_f\dot{\varphi}^2 + V'(r_f) = 0$

$$\leadsto \dot{\varphi} = \pm \sqrt{\frac{\|V'(r_f)\|}{mr_f}} \quad (2.83)$$

2. Periodische Bahn: $r_0 = r(t_0)$ ABBILDUNG

$$t(r) = t_0 + \int_{r_0}^r \frac{dr'}{\sqrt{\frac{2}{m}(\varepsilon - V(r')) - \frac{l'^2}{2mr'^2}}} \quad (2.84)$$

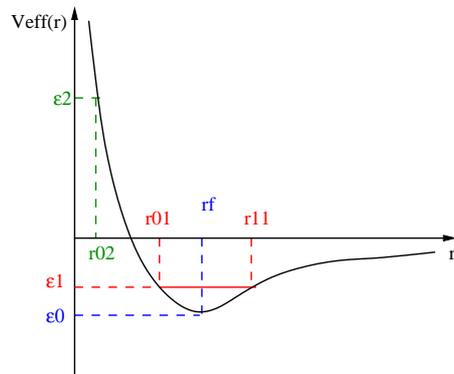


Abbildung 2.1: Effektives Potential

mit Periode T :

$$T = 2 \int_{r_0}^{r_1} \frac{dr'}{\sqrt{\frac{2}{m} \left(\varepsilon - V(r') - \frac{l^2}{2mr'^2} \right)}} \quad (2.85)$$

Winkel: $\varphi(t_0) = 0$

$$\dot{\varphi} = \frac{l}{mr^2} \quad (2.86)$$

es folgt

$$d\varphi = \frac{l}{m} dt \frac{1}{r^2} = \frac{l}{m} \frac{1}{\dot{r}} dr \frac{1}{r^2} \quad (2.87)$$

$$\curvearrowright \varphi(r) = \frac{l}{m} \int_{r_0}^{r(t)} dr' \frac{1}{\dot{r}' r'^2} = \frac{l}{m} \int_{r_0}^{r(t)} \frac{dr'}{r'^2 \sqrt{\frac{2}{m} \left(\varepsilon - V(r') - \frac{l^2}{2mr'^2} \right)}} \quad (2.88)$$

Kapitel 3

Keplerproblem

Dieses Kapitel behandelt die Berechnung der Bahn von Himmelskörpern (Planeten, Monden, Asteroiden, Kometen).

In unserem Sonnensystem

Sonne

Durchmesser:	$1.4 \cdot 10^6$ km
Masse m_{s_0} :	$1.99 \cdot 10^{30}$ kg
$\gamma \cdot m_{s_0}$:	$1.33 \cdot 10^{20} \frac{m^3}{s^2}$

Erde

Durchmesser:	$12.76 \cdot 10^3$ km
Perihel r_- :	0.98 AE
Aphel r_+ :	1.02 AE
Mittlere Bahngeschwindigkeit:	$29.8 \frac{km}{s}$
Masse m :	$5.98 \cdot 10^{24}$ kg

Ceres (Zwergplanet)

Durchmesser:	900 km
Perihel r_- :	2.54 AE
Aphel r_+ :	2.99 AE
Mittlere Bahngeschwindigkeit:	$17.9 \frac{km}{s}$
Masse m :	$9.35 \cdot 10^{20}$ kg

Gravitationspotential

Für das Gravitationspotential eines Körpers gilt

$$V = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r} \rightsquigarrow \vec{F} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^3} \vec{r} \quad (3.1)$$

3.1 Virialsatz

“Die mittlere kinetische Energie eines Massenpunktes im Gravitationspotential ist gleich der (negativen) halben potentiellen Energie.”

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau dt T(t) = -\frac{1}{2} \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau dt V(x(t)) \quad (3.2)$$

Allgemeiner Virialsatz:

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau dt T(t) = -\frac{1}{2} \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau dt \sum_i \vec{r}_i \cdot \vec{F}_i$$

mit der Newtonschen Bewegungsgleichung

$$m_i \ddot{x}_i = \dot{p}_i = \vec{F}_i$$

und mit beschränkten Bewegungen und Impulsen

$$\begin{aligned} \|\vec{r}_i\| &< c_i < \infty \\ \|\vec{p}_i\| &< d_i < \infty \end{aligned} \quad (3.3)$$

Beweis:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \sum_i \vec{r}_i \cdot \vec{p}_i &= \sum_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \vec{p}_i + \sum_i \vec{r}_i \cdot \dot{\vec{p}}_i \\ &= 2 \sum_i \underbrace{\frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i^2}_{T_i} + \sum_i \vec{r}_i \cdot \vec{F}_i \end{aligned}$$

Wir setzen

$$T = \sum_i T_i$$

und integrieren

$$\frac{1}{\tau} (\vec{r}_i \cdot \vec{p}_i)(t) \Big|_0^\tau = 2 \frac{1}{\tau} \int_0^\tau dt T(t) + \frac{1}{\tau} \int_0^\tau dt \sum_i \vec{r}_i \cdot \vec{F}_i \quad (3.4)$$

Da \vec{r} und \vec{p} beschränkt sind, konvergiert der linke Ausdruck für $\tau \rightarrow \infty$ gegen Null. Es folgt:

$$\begin{aligned} 0 &= 2 \langle T \rangle_\infty + \left\langle \sum_i \vec{r}_i \cdot \vec{F}_i \right\rangle_\infty \\ \langle T \rangle_\infty &= -\frac{1}{2} \left\langle \sum_i \vec{r}_i \cdot \vec{F}_i \right\rangle_\infty \end{aligned} \quad (3.5)$$

Für periodische Funktionen genügt es, über die Periodendauer T zu mitteln (Clausiusches Virial):

$$\langle T \rangle_T = -\frac{1}{2} \left\langle \sum_i \vec{r}_i \cdot \vec{F}_i \right\rangle_T \quad (3.6)$$

Für konservative Kräfte setzen wir den Gradienten des Potentials ein:

$$\langle T \rangle = +\frac{1}{2} \left\langle \sum_i \vec{r}_i \cdot \vec{\nabla}_i \cdot V_i \right\rangle \quad (3.7)$$

Für uns ist besonders der Fall eines Massenpunktes in einem Zentralpotential interessant:

$$\langle T \rangle = \frac{1}{2} \left\langle r \frac{\partial V}{\partial r} \right\rangle \quad (3.8)$$

Der Operator $r \frac{\partial}{\partial r}$ "zählt" Potenzen, $r \frac{\partial}{\partial r} r^n = n r^n$. Damit erhalten wir für Potenzpotentiale

$$V = \gamma \cdot r^{n+1}$$

den Virialsatz

$$\langle T \rangle = \frac{1}{2} (n + 1) \langle V \rangle \quad (3.9)$$

Eingesetzt für das Gravitationspotential mit $n = -2$:

$$\langle T \rangle = -\frac{1}{2} \langle V \rangle \quad (3.10)$$

3.2 Bewegung im Gravitationspotential

Beispiel: Wir betrachten das Subsystem Sonne-Erde im Sonnensystem.



Um diese Vereinfachung zu begründen, schätzen wir die "Störungen" durch Mond, Venus und Mars ab:

Mond

Der **Mond** ist ein Erdtrabant. Wir betrachten das System Erde-Mond als ausdehnungslose Masse im gemeinsamen Schwerpunkt.

$$\begin{aligned} \text{Masse } m_{E+M}: & 6.05 \cdot 10^{24} \text{ kg} \\ \text{Masse Mond } m_M: & 7.35 \cdot 10^{22} \text{ kg} \\ \text{Abstand Erde-Mond } d_{MoE}: & 3.56 \cdot 10^5 \text{ km} - 4.07 \cdot 10^5 \text{ km} \end{aligned}$$

Venus

$$\begin{aligned} \text{Masse } m_{Ve}: & 4.87 \cdot 10^{24} \text{ kg} \\ \text{Perihel } r_-: & 0.72 \text{ AE} \\ \text{Aphel } r_+: & 0.73 \text{ AE} \\ \text{Abstand zur Erde } d_{-VeE}: & 0.26 \text{ AE} \\ & d_{+VeE}: 1.74 \text{ AE} \\ \text{Relative Gravitationskraft:} & -\gamma \frac{m_{Ve} m_E}{d_{Ve}^2} \cdot \left(-\gamma \frac{m_{So} m_E}{d_{SoE}^2} \right) \\ & \leq \frac{m_{Ve}}{m_{So}} \cdot \left(\frac{d_{AphelSoE}}{d_{-VeE}} \right)^2 \\ & = 2.45 \cdot 10^{-6} \cdot 15.4 = 3.77 \cdot 10^{-5} \end{aligned}$$

Mars

$$\begin{aligned} \text{Masse } m_{Mars}: & 6.42 \cdot 10^{23} \text{ kg} \\ \text{Perihel } r_-: & 1.38 \text{ AE} \\ \text{Aphel } r_+: & 1.67 \text{ AE} \\ \text{Abstand zur Erde } d_{-MaE}: & 0.37 \text{ AE} \\ & d_{+MaE}: 2.68 \text{ AE} \end{aligned}$$

Asteroidengürtel**Saturn****Jupiter**

Wie man am Beispiel der Venus gesehen hat, ist der Einfluss der anderen Himmelskörper auf das System Sonne-Erde gering. Die Reduktion auf ein Zweikörperproblem ist sinnvoll. Wir betrachten zwei Massenpunkte m_1, m_2 .

Reduzierte Masse:

$$m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \approx_{m_1 \ll m_2} m_1, \quad M = m_1 + m_2 \quad (3.11)$$

Effektives Potential:

$$V_{eff}(r) = -\gamma \frac{Mm}{r} + \frac{l^2}{2mr^2} \quad (3.12)$$

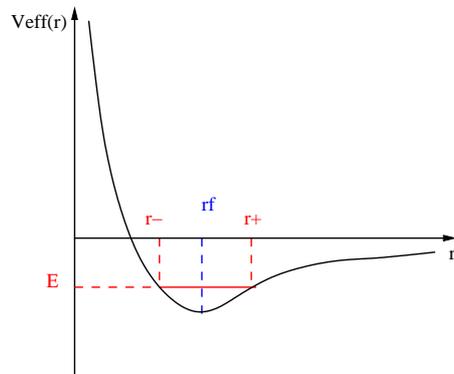


Abbildung 3.1: Effektives Potential

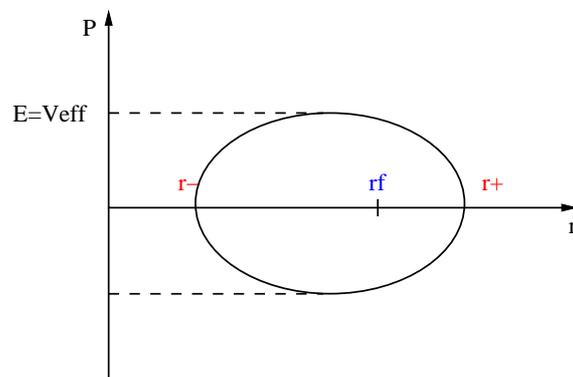


Abbildung 3.2: Der Phasenraum des effektiven Potentials

Umkehrpunkte

$$E = V_{eff}(r_{\pm})$$

$$\rightarrow r_{\pm} = -\gamma \frac{Mm}{2E} \pm \sqrt{\left(\gamma \frac{Mm}{2E}\right)^2 + \frac{l^2}{2mE}} \quad (3.13)$$

Fixpunkt

$$V'_{eff}(r_f) = 0$$

$$\rightarrow r_f = \frac{l^2}{\gamma M m^2} \quad (3.14)$$

$$E_f = -\frac{\gamma^2 M^2 m^3}{2l^2} \quad (3.15)$$

Bewegungsgleichung

$$m\ddot{r} = -\gamma \frac{mM}{r^2} + \frac{l^2}{mr^3} \quad (3.16)$$

3.2.1 Direkte Lösung

Mit der Drehimpulserhaltung $l = \text{konst.}$ wandeln wir die t -Ableitung in eine φ -Ableitung um:

$$l dt = m r^2 d\varphi \rightsquigarrow \frac{d}{dt} = \frac{l}{m r^2} \frac{d}{d\varphi} \quad (3.17)$$

damit gilt für \ddot{r}

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} &= \frac{l}{m r^2} \frac{d}{d\varphi} \frac{l}{m r^2} \frac{d}{d\varphi} \\ &= \frac{l^2}{m^2} \frac{1}{r^2} \frac{d}{d\varphi} \frac{1}{r^2} \frac{d}{d\varphi} \\ &= \frac{l^2}{m^2} \rho^2 \frac{d}{d\varphi} \rho^2 \frac{d}{d\varphi} \end{aligned} \quad (3.18)$$

mit

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{1}{r} \\ \rightsquigarrow \frac{d}{d\varphi} \rho^2 \frac{d}{d\varphi} \frac{1}{\rho} &= - \frac{d}{d\varphi} \rho^2 \frac{1}{\rho^2} \frac{d\rho}{d\varphi} = \frac{d^2 \rho}{d\varphi^2} \end{aligned} \quad (3.19)$$

die Differentialgleichung (3.16) nimmt nun die einfache Form an:

$$\frac{l^2}{m} \rho^2 \left(\frac{d^2 \rho}{d\varphi^2} + \rho \right) = \gamma m M \rho^2 \quad (3.20)$$

wir definieren

$$\begin{aligned} \bar{\rho} &= \rho - \gamma \frac{m^2 M}{l^2} \\ \rightsquigarrow 0 &= \frac{d^2 \bar{\rho}}{d\varphi^2} + \bar{\rho} \end{aligned} \quad (3.21)$$

Lösung:

$$\bar{\rho} = b \cos(\varphi - \varphi') \quad (3.22)$$

Auflösen nach r

$$r(\varphi) = \frac{l^2}{m^2 M \gamma} \frac{1}{1 + \varepsilon \cos(\varphi - \varphi')} \quad (3.23)$$

mit

$$\varepsilon = \frac{b l^2}{m^3 M \gamma} \quad (3.24)$$

Bestimmung der Exzentrizität ε :

$$r_{\pm} = \frac{l^2}{Mm^2\gamma} \frac{1}{1 \mp \varepsilon} \quad (3.25)$$

Große Halbachse

$$\begin{aligned} a &:= \frac{1}{2}(r_+ + r_-) = \frac{l^2}{Mm^2\gamma} \frac{1}{1 - \varepsilon^2} \\ &\stackrel{(3.13)}{=} \gamma \frac{Mm}{2E} \end{aligned} \quad (3.26)$$

und damit

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2El^2}{\gamma^2 M^2 m^3}} \quad (3.27)$$

Klassifizierung der Lösungen (1. Keplersches Gesetz)

Kreisbahn:

$$\varepsilon = 0 : E = E_f = \frac{-\gamma^2 M^2 m^3}{2l^2} \text{ und } r = r_f \quad (3.28)$$

Ellipse:

$$0 < \varepsilon < 1 : E_f < E < 0 \text{ und } r_{\pm} = (1 \pm \varepsilon)a \quad (3.29)$$

Aperiodischer Grenzfall:

$$\varepsilon = 1 : E = 0 \text{ und } r_- = \frac{l^2}{2\gamma m^2 M} \quad (3.30)$$

Hyperbel

$$\varepsilon > 1 : E > 0 \text{ und } r_- = (1 - \varepsilon)a \quad (3.31)$$

3.2.2 Lösung durch Integration

Die direkte Lösung führte zwar auf eine einfache Differentialgleichung, den harmonischen Oszillator, diese Rückführung bedurfte jedoch eines nicht-konstruktiven Weges über die Substitutionen ρ und $\bar{\rho}$. Im Allgemeinen ist die Integration hilfreicher. Ansatz: Setze V_{grav} in $\varphi(r)$ ein.

$$\varphi(r) = \int_{r_-}^r \frac{dr'}{r'^2 \sqrt{\frac{2m}{l^2} \left(E + \gamma \frac{Mm}{r'} - \frac{l^2}{2mr'^2} \right)}} \quad (3.32)$$

Wir benutzen $\frac{dr'}{r'^2} = -d\rho'$ mit $\rho' = \frac{1}{r'}$ analog zur direkten Lösung. Es folgt für $\varepsilon < 1, a > 0$:

$$\begin{aligned}\varphi(r) &= \int_{\rho}^{\rho-} \frac{d\rho'}{\sqrt{\frac{2mE}{l^2} (1 - 2a\rho') - \rho'^2}} \\ &= \int_{\rho}^{\rho-} \frac{d\rho'}{\sqrt{\frac{1}{a^2(\varepsilon^2-1)} (1 - 2a\rho') - \rho'^2}}\end{aligned}\quad (3.33)$$

mit $\tilde{\rho} = |a| \cdot \rho$

$$= \frac{a}{|a|} \int_{\rho \cdot |a|}^{\rho- \cdot |a|} \frac{d\tilde{\rho}}{\sqrt{\frac{1}{(\varepsilon^2-1)} + \frac{2\tilde{\rho}'}{1-\varepsilon^2} - \tilde{\rho}'^2}}\quad (3.34)$$

es folgt

$$\varphi(r) = \frac{a}{|a|} \left[\arcsin \left(\frac{|\varepsilon^2 - 1| \tilde{\rho} - 1}{\varepsilon} \right) \right]_{\frac{|a|}{r}}^{\frac{|a|}{r_-}} \quad \text{mit } \varphi(r_-) = 0 \quad (3.35)$$

Wir benutzen

$$\begin{aligned}a &= -\gamma \frac{Mm}{2E} \\ r_- &= a \left(1 - \sqrt{1 + \frac{2El^2}{\gamma M^2 m^3}} \right) \\ &= a \cdot (1 - \varepsilon)\end{aligned}\quad (3.36)$$

$$\rightsquigarrow |\varepsilon^2 - 1| \frac{|a|}{r_-} - 1 = |1 + \varepsilon| - 1 = \varepsilon \quad (3.37)$$

und damit

$$\arcsin \left(\frac{|\varepsilon^2 - 1| \frac{|a|}{r_-} - 1}{\varepsilon} \right) = \arcsin(1) = \frac{\pi}{2} \quad (3.38)$$

Die Lösung $\varphi(r)$ ist

$$\frac{a}{|a|} \varphi(r) = \arcsin \left(\frac{1 - |\varepsilon^2 - 1| \frac{|a|}{r}}{\varepsilon} \right) + \frac{\pi}{2} \quad (3.39)$$

und als Funktion

$$r(\varphi) = \frac{a(1 - \varepsilon^2)}{1 + \varepsilon \cos \varphi} \quad (3.40)$$

$$\rightsquigarrow b = \frac{\varepsilon}{a(1 - \varepsilon^2)} \quad (3.41)$$

für die Periheldrehung gilt

$$\Delta\varphi = 2\varphi(r_+) = 2 \left(\arcsin \frac{1 - \overbrace{|\varepsilon^2 - 1|}^{1+\varepsilon} \frac{a}{r_+}}{\varepsilon} + \frac{\pi}{2} \right) = 2\pi \quad (3.42)$$

3.2.3 Keplersche Gesetze

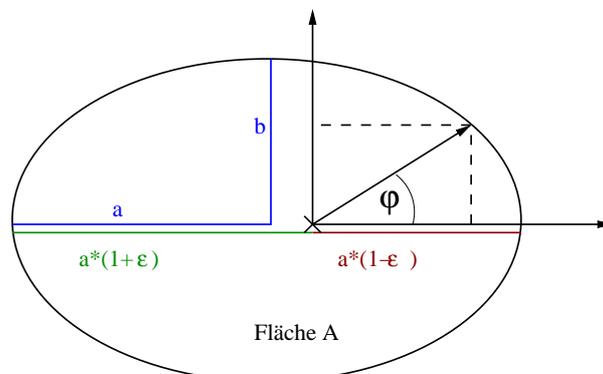
1. Keplersches Gesetz “Die Planeten bewegen sich auf Ellipsen, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht.”

$$\begin{aligned} E > 0 : \varepsilon > 1 & \text{ Parabel} \\ E = 0 : \varepsilon = 1 & \text{ Hyperbel} \\ E < 0 : \varepsilon < 1 & \text{ Ellipse} \\ E = -\frac{m\gamma^2}{2l^2} : \varepsilon = 0 & \text{ Kreis} \end{aligned} \quad (3.43)$$

2. Keplersches Gesetz “ $\vec{r}(t)$ überstreicht im fixen Zeitintervall eine fixe Fläche.”

$$dA = \frac{l}{2m} dt \quad (3.44)$$

3. Keplersches Gesetz “Die kubische Potenz der Halbachsen sind proportional zum Quadrat der Umlaufzeiten.”



$$b = a\sqrt{|1 - \varepsilon^2|}, \quad a = -\gamma \frac{Mm}{2E}$$

$$x_1(\varphi) = r(\varphi) \cdot \cos \varphi$$

$$x_2(\varphi) = r(\varphi) \cdot \sin \varphi$$

$$E \neq 0 : (x_1 \pm \varepsilon |a|)^2 \pm \frac{a^2}{b^2} x_2^2 = a^2$$

Fläche:

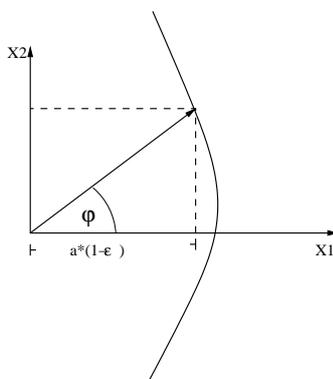
$$A = \pi \cdot a \cdot b = \int_0^T \frac{l}{2m} dt = \frac{l}{2m} T$$

und damit

$$\frac{l}{m} = \sqrt{aM\gamma(1 - \varepsilon^2)}$$

$$\pi a^2 \sqrt{|1 - \varepsilon^2|} = \frac{\sqrt{aM\gamma(1 - \varepsilon^2)}}{2} T$$

$$\leadsto T = \frac{2\pi}{\sqrt{\gamma M}} a^{\frac{3}{2}} \quad (3.45)$$



3.3 Lenz-Runge-Vektor

Wir hatten berechnet, dass es im Gravitationspotential keine Periheldrehung gibt: Dies ist ein Hinweis auf einen neuen Erhaltungssatz.

$$\vec{S} = \vec{p} \times \vec{l} + mV(r)\vec{r} \quad (3.46)$$

mit $\dot{\vec{S}} = 0$

Beweis:

$$\begin{aligned}
\dot{\vec{l}} &= 0 \\
\dot{\vec{S}} &= \dot{\vec{p}} \times \vec{l} + \underbrace{\vec{p} \times \dot{\vec{l}}}_{=0} + m(\dot{\vec{r}} \cdot \vec{\nabla} V) \vec{r} + mV(r) \dot{\vec{r}} \\
&= -\vec{\nabla} V \times \vec{l} + m(\dot{\vec{r}} \cdot \vec{r}) \vec{r} \frac{V'}{r} + mV \dot{\vec{r}} \\
&= -\frac{V'}{r} (\vec{r} \times \vec{l}) + m(\dot{\vec{r}} \cdot \vec{r}) \vec{r} \frac{V'}{r} + mV \dot{\vec{r}} \\
&= -\frac{V'}{r} \vec{r} \times (\vec{r} \times m\dot{\vec{r}}) + m(\dot{\vec{r}} \cdot \vec{r}) \vec{r} \frac{V'}{r} + mV \dot{\vec{r}} \quad (3.47) \\
&= -\frac{V'}{r} \underbrace{\vec{r} \times (\vec{r} \times m\dot{\vec{r}})}_{-(mr^2\dot{\vec{r}} - m(\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}})\vec{r})} + m(\dot{\vec{r}} \cdot \vec{r}) \vec{r} \frac{V'}{r} + mV \dot{\vec{r}} \\
&= -\frac{V'}{r} (-mr^2\dot{\vec{r}} + m(\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}})\vec{r}) + m(\dot{\vec{r}} \cdot \vec{r}) \vec{r} \frac{V'}{r} + mV \dot{\vec{r}} \\
&= -\frac{V'}{r} (-mr^2\dot{\vec{r}}) + mV \dot{\vec{r}} \\
&= \vec{p}(rV' + V)
\end{aligned}$$

Im Fall $n = -2$ gilt $rV' = -V$ und somit

$$\dot{\vec{S}} = \vec{p}(rV' + V) = 0 \quad (3.48)$$

3.4 Relativistische Korrekturen

1. Relativistische Masse

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (3.49)$$

2. Energiedichte des Feldes:

$$E_G = \frac{-(-\vec{\nabla} V)^2}{8\pi\gamma} \quad (3.50)$$

$$\text{mit } V = \frac{-\gamma M}{r} \quad (3.51)$$

$$\rightsquigarrow E_G = -\frac{1}{8\pi} \frac{M^2\gamma}{r^4} \quad (3.52)$$

Masse bei Radius r : (WW-Stärke)

$$M_r = \underbrace{M}_{M=M_\infty} - \frac{1}{c} \int_{\|x\| \geq r} d^3x E_G(\|x\|) = M + \frac{1}{2} \gamma \frac{M^2}{rc^2} \quad (3.53)$$

Außerdem nehmen wir eine Kreisbahn an:

$$\frac{mv^2}{r} = \gamma \frac{Mm}{r^2} \quad (3.54)$$

Es folgt

$$E = \frac{m_0 v^2}{2} + \frac{m_0}{4} \frac{v^4}{c^2} - \frac{\gamma m_0 M}{r} \quad (3.55)$$

$$- \gamma \frac{m_0 M}{2r} \frac{v^2}{c^2} - \gamma^2 \frac{m_0 M^2}{2r^2 c^2} \quad (3.56)$$

$$= m_0 \frac{v^2}{c^2} - \gamma \frac{m_0 M}{r} - \frac{3}{4} \gamma^2 \frac{m M^2}{r^2 c^2} \quad (3.57)$$

$V(r) = -\frac{\gamma M m}{r} + \frac{\alpha}{r^2} \quad (3.58)$
$\text{mit } \alpha = -\frac{3}{4} \gamma^2 \frac{m M^2}{c^2} \quad (3.59)$

Kapitel 4

Lagrangegleichungen

Motivation: Entwicklung eines allgemeinen formalen Rahmens zum Behandeln allgemeiner physikalischer Systeme. N Massenpunkte mit Koordinaten x_1, \dots, x_{3N} und Zwangsbedingungen, wie z. B. zwei Massenpunkte mit konstantem Abstand $\|\vec{x} - \vec{y}\| = L$.

Wir führen verallgemeinerte Koordinaten ein und klassifizieren die Zwangsbedingungen.

4.1 Verallgemeinerte Koordinaten und Zwangsbedingungen

Gegeben seien N Massenpunkte in einem 3-dim Raum mit kartesischen Koordinaten:

$$(x_1(t), \dots, x_{3N}(t))$$

Es werden nun **Verallgemeinerte Koordinaten** q_i (mit $i = 1, \dots, 3N$) gewählt. Man stelle sich für q_i beispielsweise Kugelkoordinaten (r, φ, θ) oder Zylinderkoordinaten (r, φ, z) vor. Je nach Geometrie des Problems können aber auch andere generalisierte Koordinaten sinnvoll sein.

$$\begin{aligned} x_i &= x_i(q_1(t), \dots, q_{3N}(t); t) \\ q_i &= q_i(x_1(t), \dots, x_{3N}(t); t) \quad (\text{lokal}) \end{aligned}$$

Beispiel: 1 Massenpunkt mit kartesischen Koordinaten (x_1, x_2, x_3) bzw. Kugelkoordinaten (r, φ, θ) . Es ergeben sich die bekannten Transformationsgleichungen:

$$\begin{aligned} x_1 &= r \cos \varphi \sin \theta \\ x_2 &= r \sin \varphi \sin \theta \\ x_3 &= r \cos \theta \end{aligned}$$

Im Allgemeinen unterliegen die Bewegungen Zwangsbedingungen, z. B. Pendel:
ABBILDUNG

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = R^2$$

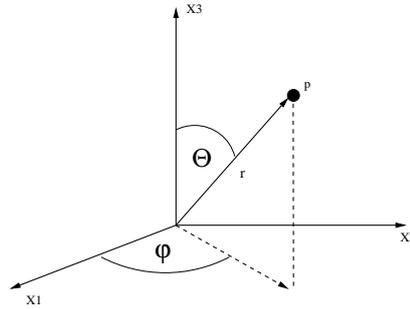


Abbildung 4.1: Massepunkt mit Kugelkoordinaten

Der Abstand des Pendels zum Ursprung bleibt konstant $r = R$, ändert sich also nicht mit der Zeit $\dot{r} = 0$.

4.1.1 Klassifizierung der Zwangsbedingungen

Die Zwangsbedingungen können in verschiedene Unterklassen aufgeteilt werden:

1. Holonome Zwangsbedingungen

$$f_\lambda(x_1, \dots, x_{3N}; t) = 0 \quad \lambda = 1, \dots, \Lambda$$

Beispiele:

- (a) Zwei Massenpunkte mit Koordinaten (y_1, y_2, y_3) bzw. (z_1, z_2, z_3) , die sich mit konstantem relativen Abstand L auf der x_2 -Achse bewegen. ABBILDUNG

$$\begin{aligned} f_1 &= y_1 & , & & f_3 &= z_1 \\ f_2 &= y_3 & , & & f_4 &= z_3 \\ f_5 &= (y_2 - z_2)^2 - L^2 \end{aligned}$$

Die Bewegung findet statt im $\mathbb{R}^{3N} = \mathbb{R}^6$ und reduziert sich aufgrund der $\Lambda = 5$ Zwangsbedingungen zu einem eindimensionalen Problem.

- (b) Man betrachte die Bewegung eines 3-dimensionalen Pendels auf einer Kugeloberfläche (Kugel vom Radius R). ABBILDUNG

$$f_1 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - R^2$$

Jede unabhängige Zwangsbedingung f_λ kann dazu benutzt werden, eine Koordinate aus den Bewegungsgleichungen zu eliminieren:

$$\begin{aligned} (x_1, \dots, x_{3N}) &\rightarrow (q_1, \dots, q_{3N-\Lambda}) \\ x_i &= x_i(q_1, \dots, q_{3N-\Lambda}; t) \\ \text{mit } f_\lambda(x_1(q_1, \dots, q_{3N-\Lambda}; t), \dots, x_{3N}(q_1, \dots, q_{3N-\Lambda}; t)) &= 0 \end{aligned}$$

Holonome Zwangsbedingungen beschreiben also eine $3N - \Lambda =: K$ -dimensionale Mannigfaltigkeit M_K im \mathbb{R}^{3N} . Die Bewegung findet auf M_K

statt, wobei $M_K = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^{3N} | f_\lambda(\vec{x}, t) = 0 \quad \forall \lambda\}$.

An dieser Stelle soll nicht genauer auf die Definition einer Mannigfaltigkeit eingegangen werden. Es genügt, sich diese als Hyperfläche (ohne Ecken und Kanten) im $3N$ -dimensionalen Raum vorzustellen, beispielsweise also als Oberfläche der Kugel vom Radius R im \mathbb{R}^3 (Beispiel b).

In Beispiel (b) gibt es nur eine Zwangsbedingung, also $\Lambda = 1$. Man kann nun Kugelkoordinaten (r, φ, θ) wählen¹ und mit Hilfe der Zwangsbedingung die Koordinate r eliminieren und durch das konstante R ersetzen:

$$\begin{aligned} (x_1, x_2, x_3) &\rightarrow (\varphi, \theta) : \\ \left. \begin{aligned} x_1 &= R \cos \varphi \sin \theta \\ x_2 &= R \sin \varphi \sin \theta \\ x_3 &= R \cos \theta \end{aligned} \right\} f_1 \hat{=} 0 \end{aligned}$$

- Skleronome Zwangsbedingungen:
Bei „skleronomen“ (starren) Zwangsbedingungen tritt keine explizite Zeitabhängigkeit der $f_\lambda \Rightarrow$ Es gibt q_i ohne explizite Zeitabhängigkeit!
- Rheonome Zwangsbedingungen:
Bei „rheonomen“ (fließenden) Zwangsbedingungen tritt im Gegensatz zu den skleronomen Zwangsbedingungen eine explizite Zeitabhängigkeit auf.

2. Nichtholonome Zwangsbedingungen

(a) Ungleichungen

$$f_\lambda(x_1, \dots, x_{3N}; t) \geq 0$$

Beispiele:

- Gas in Behälter
- Fadenpendel

(b) Geschwindigkeitsabhängige Zwangsbedingungen

$$f_\lambda(x_1, \dots, x_{3N}, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_{3N}; t) = 0$$

oder in differentieller Form

$$\omega_\lambda = \sum_j c_{\lambda j} dx_j + c_{\lambda t} dt = 0$$

$$\text{mit } f_\lambda = \frac{\omega_\lambda}{dt} = \sum_j c_{\lambda j} \dot{x}_j + c_{\lambda t} \text{ und } \begin{aligned} c_{\lambda j} &= c_{\lambda j}(x_1, \dots, x_{3N}; t) \\ c_{\lambda t} &= c_{\lambda t}(x_1, \dots, x_{3N}; t) \end{aligned}$$

Falls ω_λ integrierbar ist mit $F_\lambda = \int \omega_\lambda$ wegunabhängig, so ist die Zwangsbedingung holonom: $F_\lambda = F_\lambda(x_1, \dots, x_{3N}; t)$

¹Die Wahl von Kugelkoordinaten als generalisierten Koordinaten bietet sich natürlich aufgrund der vorhandenen Geometrie an

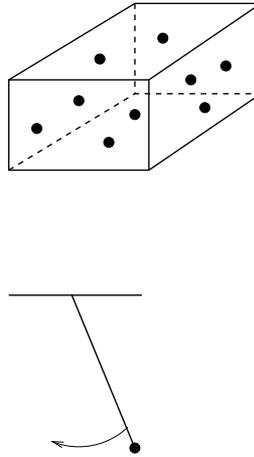


Abbildung 4.2: Beispiele für nichtholonome Zwangsbedingungen (Gas, Fadenpendel)

Integrabilitätsbedingung: $d\omega_\lambda = 0$

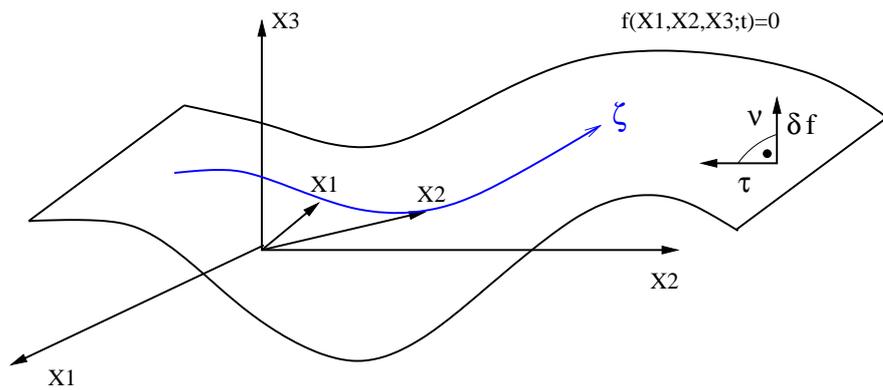
$$d\omega_\lambda = \sum \left(\frac{\partial c_{\lambda j}}{\partial x_i} - \frac{\partial c_{\lambda i}}{\partial x_j} \right) dx_i \wedge dx_j + \sum_i \left(\frac{\partial c_{\lambda t}}{\partial x_i} - \frac{\partial c_{\lambda i}}{\partial t} \right) dx_i \wedge dt$$

4.1.2 Geometrische Interpretation und Bewegungsgleichungen

Holonome Zwangsbedingungen:

Holonome Zwangsbedingungen beschreiben einen $K = 3N - \Lambda$ -dimensionale Mannigfaltigkeit M_K im \mathbb{R}^{3N} . Die Bewegung findet auf M_K statt.

t fix:



Tangentialvektoren $\vec{\tau}_1, \dots, \vec{\tau}_K$: $\tau_{l,i} = \frac{\partial x_i(q_1, \dots, q_K; t)}{\partial q_l}$ $l = 1, \dots, K$

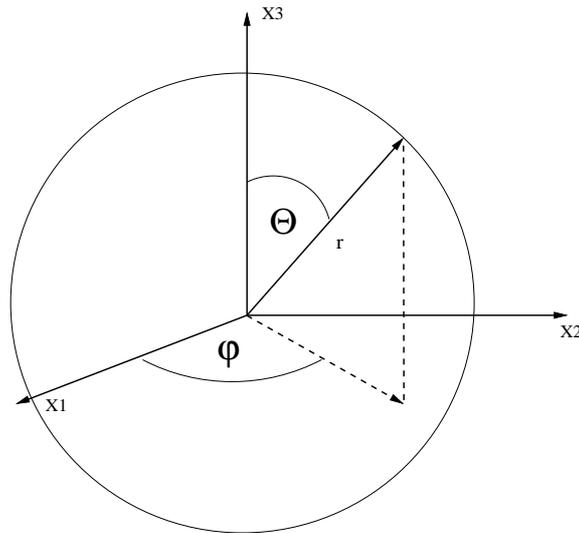
4.1. VERALLGEMEINERTE KOORDINATEN UND ZWANGSBEDINGUNGEN 49

Linear unabhängige Zwangsbedingungen: Matrix T mit Einträgen $T_{li} = \tau_{l,i}$ hat Rang K .

$$\text{Normalvektoren } \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_\Lambda : \nu_{\lambda,i} = \frac{\partial f_\lambda(x_1, \dots, x_{3N}; t)}{\partial x_i}$$

$$\text{mit Orthogonalität: } \vec{\tau}_l \cdot \vec{v}_\lambda = \frac{\partial x_i}{\partial q_l} \cdot \frac{\partial f_\lambda}{\partial x_i} = \frac{\partial f_\lambda}{\partial q_l} = 0$$

Die Matrix N mit $N_{\lambda i} = \nu_{\lambda,i}$ hat den Rang Λ .
Beispiel: 4.1.1 (b):



$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - R^2$$

$$\vec{q} = (r, \varphi, \theta)$$

$$\vec{x} = (r \cos \varphi \sin \theta, r \sin \varphi \sin \theta, r \cos \theta)$$

Tangentialvektoren:

$$\vec{\tau}_\varphi = \frac{\partial \vec{x}}{\partial \varphi} = r \begin{pmatrix} -\sin \varphi \sin \theta \\ \cos \varphi \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix} = r \sin \theta \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} = r \sin \theta \hat{e}_\varphi$$

$$\vec{\tau}_\theta = \frac{\partial \vec{x}}{\partial \theta} = r \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \theta \\ \sin \varphi \cos \theta \\ -\sin \varphi \end{pmatrix} = r \hat{e}_\theta$$

Normalenvektor:

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

$$\vec{v} = \vec{\nabla} f = 2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 2r \begin{pmatrix} x_1/r \\ x_2/r \\ x_3/r \end{pmatrix} = 2r \hat{e}_r$$

Wir zerlegen die Bewegungsgleichungen in Tangential- und Normalkomponenten:

In Vektorschreibweise:

$$\begin{aligned} M \cdot \ddot{\vec{x}} &= \vec{F} \text{ mit } M_{ij} = \delta_{ij} m_i \\ &\text{und } m_1 = m_2 = m_3, \\ & m_4 = m_5 = m_6, \dots \\ & m_{3N-2} = m_{3N-1} = m_{3N} \end{aligned}$$

Die Kraft hat die Tangentialkomponenten \vec{F}_τ und Normalkomponenten \vec{F}_ν mit

$$\vec{F} = \vec{F}_\tau + \vec{F}_\nu \text{ mit } \vec{F}_\tau \cdot \vec{v}_\lambda = 0 = \vec{F}_\nu \cdot \vec{\tau}_l \quad \forall \lambda, l$$

Damit:

$$\begin{aligned} \text{Tangential: } & (M \cdot \ddot{\vec{x}} - \vec{F}) \cdot \vec{\tau}_l = 0 \\ \text{in Komponenten: } & \sum_i (m_i \ddot{x}_i - F_i) \tau_{l,i} = \sum_i (m_i \ddot{x}_i - F_{\tau,i}) \tau_{l,i} = 0 \end{aligned}$$

Es liegt nahe, die tangentialen Gleichungen als dynamische und die normalen als geometrische zu sehen.

Einfachstes Beispiel: skleronome Zwangsbedingungen:

$$x_i = x_i(q_1, \dots, q_K)$$

mit Geschwindigkeiten

$$v_i = \dot{x}_i = \frac{\partial x_i}{\partial q_l} \cdot \dot{q}_l = \tau_{l,i} \cdot \dot{q}_l$$

Verrichtete Arbeit:

$$\begin{aligned} A &= \int_C dt \vec{v} \cdot \vec{F} = \int_C dt \vec{v} \cdot \vec{F}_\tau \\ \text{und } & \int_C dt \vec{v} \cdot \vec{F}_\nu = 0 \end{aligned}$$

Normalkräfte verrichten keine Arbeit.

Für unsere Beispiele sind die Zwangskräfte \vec{F}_z normal. Mit dieser Annahme formulieren wir das *d'Alembertsche Prinzip*: $l = 1, \dots, K$ (holonom)

$$(m_i \ddot{x}_i - F_i) \tau_{l,i} = (m_i \ddot{x}_i - F_{\tau,i}) \tau_{l,i} = 0$$

In \vec{F}_τ sind keine Zwangskräfte enthalten:

$$\vec{F}_z \cdot \vec{\tau}_l = 0 \quad \forall l$$

Man nennt $\tau_{l,i} \delta q_l$ *virtuelle Verrückungen*

$$\delta x_i = \tau_{l,i} \delta q_l$$

4.1. VERALLGEMEINERTE KOORDINATEN UND ZWANGSBEDINGUNGEN 51

Allgemeine Definition virtueller Verrückungen

1. Virtuelle Verrückungen erhalten die Zwangsbedingungen:

Sei $f(x_1, \dots, x_{3N}; t) = 0$

holonom:

$$f_\lambda(x_1 + \delta x_1, \dots, x_{3N} + \delta x_{3N}; t) = 0$$

$$\Rightarrow \sum_i \frac{\partial f_\lambda}{\partial x_i} \delta x_i = \sum_{i,l} \vec{v}_{\lambda,i} \vec{\tau}_{l,i} \delta q_l = 0$$

virtuelle Verrückungen unabhängig!!

2. keine „Zeitverrückung“: $\delta t = 0$

holonom: Betrachte infinitesimale Translation entlang der Trajektorien

$x_i = x_i(q_1, \dots, q_K; t)$

$$dx_i = \tau_{l,i} \delta q_l + \frac{\partial x_i}{\partial t} \delta t$$

$$f_\lambda(x_1 + \delta x_1 + \frac{\partial x_1}{\partial t} \delta t, \dots, x_{3N} + \delta x_{3N} + \frac{\partial x_{3N}}{\partial t} \delta t, t + \delta t) = 0$$

skleronom: $\frac{\partial x_i}{\partial t} = \frac{\partial f_\lambda}{\partial t} = 0 \Rightarrow$ virtuelle Verrückung $\delta x_i = dx_i$

Nichtholonome Zwangsbedingungen: δq_l i. A. abhängig

d'Alembertsches Prinzip:

$$\sum_i (m_i \ddot{x}_i - F_i) \delta x_i = 0$$

$$\sum_i F_{Zi} \delta x_i = 0$$

Wir benutzen die Verallgemeinerten Koordinaten, um Bewegungsgleichungen zu standardisieren:

verallgemeinerte Kräfte:

$$Q_l = F_i \tau_{l,i}$$

und damit (holonom):

$$\sum_i m_i \ddot{x}_i \tau_{l,i} = Q_l$$

Verallgemeinerte Geschwindigkeiten: $x_i = x_i(q_1, \dots, q_K; t)$

$$\dot{x}_i = \frac{\partial x_i}{\partial q_l} \dot{q}_l + \frac{\partial x_i}{\partial t} = \tau_{l,i} \dot{q}_l + \frac{\partial x_i}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial \dot{q}_l} \Big|_{q_i} \dot{x}_i = \tau_{l,i}$$

Wir schreiben:

$$\ddot{x}_i \tau_{l,i} = \frac{d}{dt} (\dot{x}_i \tau_{l,i}) - \dot{x}_i \frac{d}{dt} \tau_{l,i}$$

$$= \frac{d}{dt} \left(\dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_l} \right) - \dot{x}_i \frac{d}{dt} \tau_{l,i}$$

Der zweite Term kann wie folgt umgeformt werden

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\tau_{l,i} &= \dot{q}_n \frac{\partial}{\partial q_n} \frac{\partial}{\partial q_l} x_i + \frac{\partial^2}{\partial q_l \partial t} x_i \\ &= \frac{\partial}{\partial q_l} \Big|_{\dot{q}} \dot{x}_i\end{aligned}$$

Es folgt für die linke Seite der Tangentialkomponenten der Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned}\sum_i m_i \ddot{x}_i \tau_{l,i} &= \sum_i m_i \left[\frac{d}{dt} \left(\dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_l} \right) - \dot{x}_i \frac{\partial}{\partial q_l} \Big|_{\dot{q}} \dot{x}_i \right] \\ &= \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_l} \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{x}_i^2 - \frac{\partial}{\partial q_l} \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{x}_i^2 \\ &= \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_l} - \frac{\partial}{\partial q_l} \right) \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{x}_i^2\end{aligned}$$

und damit die Lagrangegleichungen 1. Art: (holonom)

$$\boxed{\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_l} - \frac{\partial T}{\partial q_l} = Q_l} \quad (4.1)$$

mit $T = \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{x}_i^2$ und $Q_l = F_i \tau_{l,i}$.

Nichtholonom: $\delta x_i = \frac{\partial x_i}{\partial q_i} \delta q_i$ mit $x_i = x_i(q_1, \dots, q_K; t)$

$$\begin{aligned}\ddot{x}_i \delta x_i &= \ddot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_l} \delta q_l = \frac{d}{dt} \left(\dot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_l} \right) \delta q_l - \dot{x}_i \frac{d}{dt} \frac{\partial x_i}{\partial q_l} \delta q_l \\ &= \frac{d}{dt} \left(\dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_l} \right) \delta q_l - \dot{x}_i \left(\dot{q}_m \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_m \partial q_l} + \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_l \partial t} \right) \delta q_l\end{aligned}$$

und damit

$$\sum_i m_i \dot{x}_i \delta x_i = \sum_{i,l} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_l} \frac{1}{2} m_i \dot{x}_i^2 - \frac{\partial}{\partial q_l} \frac{1}{2} m_i \dot{x}_i^2 \right) \delta q_l$$

Es folgen die allgemeinen Lagrangegleichungen 1. Art:

$$\boxed{\sum_l \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_l} - \frac{\partial T}{\partial q_l} - Q_l \right) \delta q_l = 0} \quad (4.2)$$

mit $Q_l = F_i \tau_{l,i} = F_i \frac{\partial x_i}{\partial q_l}$; die Definition der Tangentialvektoren $\tau_{l,i} = \frac{\partial x_i}{\partial q_l}$ gilt allgemein!

- Holonom: Zwangsbedingungen erhalten für beliebige δq , damit folgt Gleichung (4.1).
- Nichtholonom: Zwangsbedingungen erhalten für bestimmte Kombinationen $(\delta q_1, \dots, \delta q_K)$, unabhängige Variation der δq_l nicht möglich!

Konservative Kräfte:

$$F_i = \frac{\partial V}{\partial x_i}$$

Die verallgemeinerten Kräfte folgen als

$$Q_l = F_i \tau_{l,i} = - \frac{\partial x_i}{\partial q_l} \frac{\partial V}{\partial x_i} = - \frac{\partial V}{\partial q_l}$$

Wir setzen $Q_l = -\frac{\partial V}{\partial q_l}$ in die Lagrangegleichungen 1. Art ein, Gleichung (4.2), und erhalten die Lagrangegleichungen 2. Art:

$$\sum_l \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial(T-V)}{\partial \dot{q}_l} - \frac{\partial(T-V)}{\partial q_l} \right) \delta q_l = 0, \quad \text{mit } \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_l} = 0.$$

Die Kombination $T - V$ ist die *Lagrangefunktion*: $L = T - V$
Es folgt

$$\boxed{\sum_l \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} - \frac{\partial L}{\partial q_l} \right) \delta q_l = 0}$$

und holonom (δq_l unabhängig)

$$\boxed{\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} - \frac{\partial L}{\partial q_l} = 0}$$

4.1.3 Zusammenfassung

- Virtuelle Verrückungen $\delta \vec{x}$:
 \vec{x} erfülle die Zwangsbedingungen zum Zeitpunkt t .
 $\vec{x} + \delta \vec{x}$ erfülle die Zwangsbedingungen zum Zeitpunkt t .
- Tangentialvektoren:
Zwangsbedingungen erfüllt für $x_i(q_1, \dots, q_K; t)$ mit $K = 3N - \Lambda$, Λ Anzahl der unabhängigen Zwangsbedingungen: $\vec{\tau}_1, \dots, \vec{\tau}_K$

$$\tau_{l,i} = \frac{\partial x_i}{\partial q_l} \quad \text{holonom u. nicht-holonom}$$

- Normalenvektoren:

$$\vec{\tau}_l \cdot \vec{\nu}_\lambda = 0 \quad \forall l, \lambda \quad \simeq \lambda = 1, \dots, \Lambda$$

holonom: Zwangsbed. $f_\lambda(x_1, \dots, x_{3N}; t) = 0$

$$\nu_{\lambda,i} = \frac{\partial f_\lambda}{\partial x_i}$$

und damit

$$\vec{\tau}_l \cdot \vec{\nu}_\lambda = \frac{\partial x_i}{\partial q_l} \cdot \frac{\partial f_\lambda}{\partial x_i} = \frac{\partial f_\lambda}{\partial q_l} = 0$$

Beispiel: 4-6 unten (SEITENZAHL KORRIGIEREN!)

Erhaltung der Zwangsbedingung:

$$\begin{aligned} \delta \vec{x} &= (\vec{x}(q_1 + \delta q_1, \dots, q_K + \delta q_K; t) - \vec{x}(q_1, \dots, q_K; t)) \\ f_\lambda(\vec{x} + \delta \vec{x}; t) &= \delta \vec{x} \cdot \vec{\nabla} f_\lambda + f_\lambda(\vec{x}; t) + O(\delta \vec{x}^2) \\ &= \delta q_l \frac{\partial \vec{x}}{\partial q_l} \cdot \vec{\nabla} f_\lambda = \delta q_l \vec{\tau}_l \cdot \vec{\nabla} f_\lambda \stackrel{!}{=} 0 \end{aligned}$$

- d'Alembertsches Prinzip: $Q_l = F_i \tau_{l,i}$

$$\begin{aligned} \sum_i (m_i \dot{x}_i - F_i) \delta x_i &= \sum_{i,l} (m_i \ddot{x}_i - F_i) \tau_{l,i} \delta q_l = 0 \\ &= \sum_{i,l} F_{Zl} \tau_{l,i} \delta q_l \stackrel{!}{=} 0 \end{aligned}$$

Bewegungsgleichung kann gelöst werden ohne Kenntnis der Zwangskräfte
Es folgt aus $\sum_i (m_i \ddot{x}_i - F_i) \delta x_i = 0$

$$\sum_l \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_l} - \frac{\partial T}{\partial q_l} - Q_l \right) \delta q_l = 0$$

mit 4-11 unten - 4-12 (KORRIGIEREN).

Bemerkung: siehe 4-7 (KORRIGIEREN)

$$\sum_i (m_i \ddot{x}_i - F_i) \delta x_i = \left(M \cdot \ddot{\vec{x}} - \vec{F} \right) \cdot \delta \vec{x} \quad \text{mit } M_{ij} = m_i \delta_{ij} - > 4.13 \text{ KORRIGIEREN}$$

4.2 Geschwindigkeitsabhängige Potentiale

Wir starten mit $L = T - V$

$$\sum_l \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} - \frac{\partial L}{\partial q_l} \right) \delta q_l = 0 \quad (4.3)$$

und

$$\sum_l \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_l} - \frac{\partial T}{\partial q_l} - Q_l \right) \delta q_l = 0 \quad (4.4)$$

Frage: Für welche allgemeinen Q_l gilt Gleichung 4.3?

Antwort:

$$Q_l = \frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_l} - \frac{\partial V}{\partial q_l} \quad (4.5)$$

\Rightarrow Lagrangegleichungen 2. Art für Potentiale mit Kraft Q_l in 4.5.

Wichtigstes Beispiel:

Lorentzkraft in der E-Dynamik (Kraft auf Teilchen im elektromagnetischen Feld):

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \frac{1}{c} \vec{v} \times \vec{B})$$

aus Potential

$$V = q \cdot \varphi - \frac{q}{c} \vec{A} \cdot \vec{v} \quad (*)$$

$$\text{mit } \varphi = \varphi(\vec{x}; t); \quad \vec{A} = \vec{A}(\vec{x}; t).$$

Die elektrische Feldstärke \vec{E} und die magnetische \vec{B} sind durch

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\vec{\nabla} \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \\ \vec{B} &= \vec{\nabla} \times \vec{A} \end{aligned}$$

gegeben.

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 &= \vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{Integrabilität} \\ \vec{\nabla}^2 \varphi + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) &= -4\pi\rho \\ \vec{\nabla}^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \vec{\nabla} \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) &= -\frac{4\pi}{c} \vec{j} \end{aligned}$$

Aus (*) folgt die Kraft mit

$$\begin{aligned} F_i &= -\frac{\partial V}{\partial x_i} + \frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial v_i} = -q \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \frac{q}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial x_i} \vec{v} - \frac{q}{c} \frac{d}{dt} A_i \\ &= -q \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \frac{q}{c} \frac{\partial A_l}{\partial x_i} v_l - \frac{q}{c} \frac{\partial A_i}{\partial x_l} v_l - \frac{q}{c} \frac{\partial A_i}{\partial t} \\ &= q \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} - \frac{1}{c} \frac{\partial A_i}{\partial t} + \frac{1}{c} [\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}] \frac{\partial A_m}{\partial x_l} v_j \right) \\ &= q \left(E_i + \frac{1}{c} (\vec{v} \times \vec{B})_i \right) \end{aligned}$$

4.3 Lagrangegleichung mit Dissipation

1 Massenpunkt:

$$\vec{F}_{diss} = -\gamma_n |\vec{v}|^{n-1} \vec{v}$$

- Gleitende Reibung $n = 0$
- Viskose Reibung $n = 1$
- Luftreibung $n = 2$

\vec{F}_{diss} kann nicht aus einem Potential gewonnen werden. Aber ($\dot{q} = v$)

$$\vec{F}_{diss} = -\frac{\partial R}{\partial \dot{q}} \quad \text{mit } R = \frac{1}{n+1} \gamma_n |\vec{v}|^{n+1}$$

und damit (allgemein u. holonom)

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = -\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i}$$

nicht holonom:

$$\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i = 0$$

4.4 Zwangskräfte

Beschränkung auf skleronome Zwangsbedingungen.

Bisher hatten wir die Bewegungsgleichungen auf den dynamischen Anteil reduziert. Wir sind jedoch auch an den Zwangskräften interessiert, z. B. die Kraft auf eine Schiene. Das bestimmt die Materialeigenschaften wie Zugfestigkeit etc. Wir schreiben für ein System von N Massenpunkten u. $m_i = m$

$$m\ddot{x}_i = F_i + F_{Zi} \quad i = 1, \dots, 3N$$

und benutzen

$$m\ddot{x}_i = \frac{d}{dt} \dot{x}_i = \frac{d}{dt} \tau_{n,i} \dot{q}_n = \tau_{n,i} \ddot{q}_n + \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_n \partial q_m} \dot{q}_n \dot{q}_m \quad n, m = 1, \dots, 3N - \Lambda$$

KORREKTUR in der Gleichung oben fehlen die Massen, und m ist als Index ungünstig!!!

Damit können wir die Bewegungsgleichungen auf den Normalraum projizieren: $\lambda = 1, \dots, \Lambda$

$$m\ddot{x}_i \nu_{\lambda,i} = m \Gamma_{nm}^\lambda \dot{q}_n \dot{q}_m = F_{\nu\lambda} + F_{Z\nu\lambda}$$

mit Zusammenhang

$$\Gamma_{nm}^\lambda = \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_n \partial q_m} \cdot \nu_{\lambda,i}$$

Γ_{nm}^λ : Eigenschaft der Mannigfaltigkeit M_K .

Kapitel 5

Der Lagrangeformalismus

Wir haben die Lagrangegleichungen aus dem d'Alembertschen Prinzip hergeleitet. Sie folgten aus infinitesimalen Verrückungen unter der Erhaltung der Zwangsbedingungen für konservative Kräfte:

$$\sum_i \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} \right) \delta q_i = 0 \quad (5.1)$$

Hamiltonsches Prinzip: Wir werden sehen, dass $q(t)$ mit (5.1) als Extremum von

$$\int dt L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}; t) \quad (5.2)$$

folgt. Diese Extremierung führt zur Variationsrechnung (Prinzip der kleinsten Wirkung).

5.1 Variationsrechnung

Einführendes Beispiel:

Die Trajektorie ist gegeben durch:

$$\begin{pmatrix} x_1(\tau) \\ x_2(\tau) \\ z(x_1, x_2) \end{pmatrix} \quad (5.3)$$

Der Parameter τ parametrisiert dabei die Kurve:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad (5.4)$$

$$\vec{x}(\tau_0) = \vec{x}_0 \quad (5.5)$$

$$\vec{x}(\tau_1) = \vec{x}_1 \quad (5.6)$$

$$z = z(x_1, x_2) \quad (5.7)$$

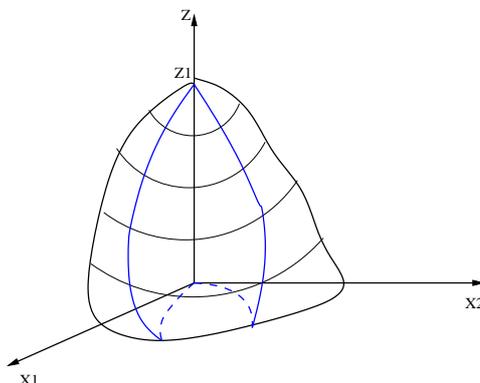


Abbildung 5.1: Beispiel für verschiedene Trajektorien. Gesucht ist die kürzeste.

mit:

$$t(\vec{x}, z) = 0 \quad (5.8)$$

Ein infinitesimales Wegstück ist gegeben durch:

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{dx_1^2 + dx_2^2 + dz^2} \\ &= d\tau \sqrt{\left(\frac{dx_1}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\tau}\right)^2} \\ &= d\tau \sqrt{\underbrace{\left(\frac{dx_1}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{d\tau}\right)^2}_{I(\vec{x}, \dot{\vec{x}}; \tau)} + \left(\vec{\nabla}_{xz} \cdot \frac{d\vec{x}}{d\tau}\right)^2} \quad (5.9) \end{aligned}$$

mit $\dot{\vec{x}} = \frac{d\vec{x}}{d\tau}$

Weglänge:

$$\begin{aligned} S &= \int_0^S ds \\ &= \int_{\tau_0}^{\tau_1} d\tau I(\vec{x}, \dot{\vec{x}}; \tau) \\ &= S[\vec{x}(\tau)] \end{aligned} \quad (5.10)$$

Man nennt $S[\vec{x}(\tau)]$ ein **Funktional**, hier eine Abbildung von $(\vec{x} : [\tau_0, \tau_1] \rightarrow \mathbb{R}^2)$ nach \mathbb{R} .

Wir suchen Extrema von S in Abhängigkeit von Bahnkurven $\vec{x}(\tau)$. Das Minimum von $S[\vec{x}_{\min}]$ bestimmt den kürzesten Weg von $\begin{pmatrix} \vec{x}_0 \\ z(\vec{x}_0) \end{pmatrix}$ nach $\begin{pmatrix} \vec{x}_1 \\ z(\vec{x}_1) \end{pmatrix}$. Dazu variieren wir die Bahnkurven:

ABBILDUNG

Dabei ist $\delta\vec{x}(\tau)$ beliebig mit:

$$\delta\vec{x}(\tau_0) = \delta\vec{x}(\tau_1) \quad (5.11)$$

$$= 0 \quad (5.12)$$

Es soll also keine Variation von Anfangs- und Endpunkt auftreten.

Der Weg

$$\begin{pmatrix} \vec{x}(\tau) \\ z(\vec{x}) \end{pmatrix} \quad (5.13)$$

ist minimal, wenn ...

$$\forall \varepsilon, \delta\vec{x} : S[\vec{x}(\tau)] < S[\vec{x}(\tau) + \varepsilon\delta\vec{x}(\tau)] \quad (5.14)$$

ist maximal, wenn ...

$$\forall \varepsilon, \delta\vec{x} : S[\vec{x}(\tau)] > S[\vec{x}(\tau) + \varepsilon\delta\vec{x}(\tau)] \quad (5.15)$$

$$(5.16)$$

Bemerkung: $\delta\vec{x}(\tau)$ ist **nicht** infinitesimal:

$$\delta\vec{x}(\tau) : [\tau_0, \tau_1] \rightarrow \mathbb{R}^2$$

Das bedeutet die Bedingung

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \delta[\vec{x}(\tau) + \varepsilon\delta\vec{x}(\tau)] \stackrel{!}{=} 0 \quad (5.17)$$

für $\vec{x}(\tau)$ extremal.

Diese Forderung bedeutet:

$$\begin{aligned} & \left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \int_{\tau_0}^{\tau_1} d\tau I(\vec{x} + \varepsilon\delta\vec{x}, \dot{\vec{x}} + \varepsilon\delta\dot{\vec{x}}; \tau) \stackrel{!}{=} 0 \\ &= \int_{\tau_0}^{\tau_1} d\tau \left[\delta x_i \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_{\vec{x}} I + \delta \dot{x}_i \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i} \Big|_{\vec{x}} I \right] \\ &= \int_{\tau_0}^{\tau_1} d\tau \left[\delta x_i \frac{\partial I}{\partial x_i} + \frac{d}{d\tau} \left(\delta x_i \frac{\partial I}{\partial \dot{x}_i} \right) - \delta x_i \frac{d}{d\tau} \frac{\partial I}{\partial \dot{x}_i} \right] \\ &= \int_{\tau_0}^{\tau_1} d\tau \delta x_i \left[\frac{\partial I}{\partial x_i} - \frac{d}{d\tau} \frac{\partial I}{\partial \dot{x}_i} \right] + \underbrace{\delta x_i \frac{\partial I}{\partial \dot{x}_i} \Big|_{\tau_0}^{\tau_1}}_{=0, \text{ da: } \delta\vec{x}(\tau_0)=\delta\vec{x}(\tau_1)=0} \\ &= \int_{\tau_0}^{\tau_1} d\tau \delta x_i \left[\frac{\partial I}{\partial x_i} - \frac{d}{d\tau} \frac{\partial I}{\partial \dot{x}_i} \right] \stackrel{!}{=} 0 \end{aligned} \quad (5.18)$$

Da δx_i beliebig war mit $\delta\vec{x}(\tau_0) = \delta\vec{x}(\tau_1) = 0$, folgt:

$$\boxed{\frac{\partial I}{\partial x_i} - \frac{d}{d\tau} \frac{\partial I}{\partial \dot{x}_i} = 0}$$

Dies ist die **Eulersche Differentialgleichung** der Variationsrechnung.

5.2 Hamiltonsches Prinzip

Feststellungen:

1. Die Eulersche Differentialgleichung hat die Form der Lagrangegleichungen.
2. Die Herleitung der Eulerschen Differentialgleichung war allgemein.

Es folgt mit $S[\vec{q}(t)] = \int_{t_0}^{t_1} L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}; t)$:

Das Extremum von $S[\vec{q}(t)]$ ist gegeben durch:

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} S[\vec{q}(t) + \varepsilon \delta \vec{q}(t)] &= \int_{t_0}^{t_1} dt L(\vec{q} + \varepsilon \delta \vec{q}, \dot{\vec{q}} + \varepsilon \delta \dot{\vec{q}}; t) \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \delta q_k \left[\frac{\partial L}{\partial q_l} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} \right] \stackrel{!}{=} 0 \end{aligned} \quad (5.19)$$

mit

$$\delta q(t_0) = \delta q(t_1) = 0 \quad (5.20)$$

Und damit, da $\delta \vec{q}$ beliebig:

$$\boxed{\frac{\partial L}{\partial q_l} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} = 0}$$

S wird **Wirkung** genannt. Die obige Gleichung bezeichnet die **Euler-Lagrangegleichungen**. Sie sind holonom wegen $\delta \vec{q}$ beliebig.

Hamiltonsches Prinzip: Wirkung S extremal für Bewegungsgleichung.

Die Lagrangefunktion ist nicht eindeutig bestimmt: Sei

$$\tilde{L}(\vec{q}, \dot{\vec{q}}; t) = L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}; t) + \frac{dF(\vec{q}, \dot{\vec{q}}; t)}{dt} \quad (5.21)$$

mit

$$F(\vec{q}, \dot{\vec{q}}; t_0) = F(\vec{q}, \dot{\vec{q}}; t_1) \quad (5.22)$$

Damit folgt:

$$\begin{aligned}
\tilde{S}[\vec{q}(t)] &= \int_{t_0}^{t_1} dt \tilde{L}(\vec{q}, \dot{\vec{q}}; t) \\
&= \int_{t_0}^{t_1} dt L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}; t) + \underbrace{\int_{t_0}^{t_1} dt \frac{dF}{dt}}_{=F(\vec{q}, \dot{\vec{q}}; t_1) - F(\vec{q}, \dot{\vec{q}}; t_0) = 0} \\
&= S[\vec{q}(t)]
\end{aligned} \tag{5.23}$$

Die Euler-Lagrangegleichungen mit \tilde{L} haben also dieselben Lösungen wie die mit L (siehe Übungen).

5.3 Allgemeine Formulierung und Zwangskräfte

Bei der Herleitung der Euler-Lagrangegleichungen hatten wir die Unabhängigkeit der δq_l verwendet: Holonom nach Reduktion

$$q_1, \dots, q_{3N} \rightarrow q_1, \dots, q_k$$

mit $k = 3N - \Lambda$ bei Λ unabhängigen Zwangsbedingungen. Wir sind auch an nichtholonomen Zwangsbedingungen sowie an der Bestimmung der Zwangskräfte interessiert. Dazu betrachten wir allgemeine Zwangsbedingungen der Form:

$$f_{nl}(\vec{q}; t) dq_l + f_{nt}(\vec{q}; t) dt \stackrel{!}{=} 0$$

mit:

$$n = 1, \dots, \Lambda \tag{5.24}$$

dies schließt nichtholonome Zwangsbedingungen der folgenden Form ein:

$$f_n(\vec{q}, \dot{\vec{q}}; t) = f_{nl} \dot{q}_l + f_{nt} \tag{5.25}$$

Holonom:

$$F_n(\vec{q}; t) = 0 \tag{5.26}$$

$$\hookrightarrow dF_n = \frac{\partial f_n}{\partial q_l} dq_l + \frac{\partial f_n}{\partial t} dt = 0 \tag{5.27}$$

mit:

$$f_{nl} = \frac{\partial f_m}{\partial q_l} = \nu_{n,l} \quad ; \quad \frac{\partial f_n}{\partial t} = f_{nt} \tag{5.28}$$

Integrabilität:

$$\frac{\partial f_{nl}}{\partial q_m} = \frac{\partial f_{nm}}{\partial q_l} = \frac{\partial^2 F_n}{\partial q_l \partial q_m} \quad (5.29)$$

Die entsprechende virtuelle Verrückung $\varepsilon \delta \vec{q}$ ist kompatibel mit den f_n ($n = 1, \dots, \Lambda$), falls (t fix: $dt = 0$). Seit $dq_l = \varepsilon \delta q_l$.

$$f_{nl} \delta q_l = 0 \quad \forall n = 1, \dots, \Lambda \quad (5.30)$$

oder:

$$\vec{f}_n \cdot \delta \vec{q} = 0 \quad \text{mit } (\vec{f}_n)_l = f_{nl} \quad (5.31)$$

Die virtuellen Verrückungen sind senkrecht zum Erzeugnis der f_n . Also gilt:

$$\{\vec{f}_n, \delta \vec{q}\}$$

erzeugt den ganzen \mathbb{R}^{3N} .

Durch die Einschränkung $\vec{f}_n \cdot \delta \vec{q} = 0$ gilt nur

$$\int_{t_0}^{t_1} dt \delta q_l \left[\frac{\partial L}{\partial q_l} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} \right] = 0 \quad (5.32)$$

aus:

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon} \delta[\vec{q} + \varepsilon \delta \vec{q}] = 0 \quad (5.33)$$

Damit muss gelten:

$$\sum_l \delta q_l \left[\frac{\partial L}{\partial q_l} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} \right] = 0 \quad (5.34)$$

Für ein allgemeines $\vec{q}(t)$ (dieses ist im allgemeinen **keine** Lösung der Bewegungsgleichung) schreiben wir:

$$\begin{aligned} (\vec{EL})_l &= \frac{\partial L}{\partial q_l} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} \\ &= \vec{EL}_{\text{dynamisch}} + \vec{EL}_{\text{geometrisch}} \end{aligned} \quad (5.35)$$

Dabei steht EL für die **Euler-Lagrangegleichung**.

Der Vektor \vec{EL} hat Komponenten senkrecht zu

$$\vec{f}_n, (\vec{EL}_{\text{dynamisch}}) \cdot \vec{f}_n = 0, \quad (5.36)$$

und senkrecht zu

$$\delta\vec{q}, (\overrightarrow{EL}_{\text{geometrisch}}) \cdot \delta\vec{q} \quad (5.37)$$

(5.32) bedeutet, dass $\overrightarrow{EL}_{\text{dynamisch}} = 0$, also gilt (5.34).

Wir schreiben auch:

$$\begin{aligned} (\overrightarrow{EL}_{\text{geometrisch}})_l &= -\lambda_n f_{nl} \\ &= (\lambda_n \vec{f}_n)_l \end{aligned} \quad (5.38)$$

und damit für beliebige δq_l (**nicht eingeschränkt** durch $\vec{f}_n \cdot \delta\vec{q} = 0$)

$$\int_{t_0}^{t_1} dt \delta q_l \left[\frac{\partial L}{\partial q_l} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} + \lambda_n f_{nl} \right] = 0 \quad (5.39)$$

Dies lässt sich auch folgendermaßen schreiben (λ sind Lagrangemultiplikatoren, $\lambda_n f_{nl}$ Zwangskräfte):

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial q_l} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} + \lambda_n f_{nl} &= 0 \\ f_{nl} \dot{q}_l + f_{nt} &= 0 \end{aligned}}$$

Mit $3N$ Gleichungen; q_l mit $l = 1, \dots, 3N$; λ_n mit $n = 1, \dots, \Lambda$.

Anwendung zur Bestimmung von Zwangskräften im holonomen Fall über die Lagrangemultiplikatoren:

Wir definieren:

$$S[\vec{x}(t), \vec{\lambda}(t)] = \int_{t_0}^{t_1} dt [L(\vec{x}, \dot{\vec{x}}; t) + \vec{\lambda}_n F_n(\vec{x}, t)] \quad (5.40)$$

Mit holonomen Zwangsbedingungen F_1, \dots, F_Λ und

$$\begin{aligned} dF_n &= \underbrace{\frac{\partial F_n}{\partial x_i}}_{f_{ni}} dx_i + \underbrace{\frac{dF_n}{dt}}_{f_{nt}} dt \\ &= f_{ni} dx_i + f_{nt} dt \quad \text{mit } i = 1, \dots, 3N \end{aligned} \quad (5.41)$$

Die Extrema von S sind Lösungen der Bewegungsgleichung:

- $\delta\vec{x}(t)$ beliebig:

$$\frac{d}{d\varepsilon} S[\vec{x}(t) + \varepsilon \delta\vec{x}(t), \vec{\lambda}(t)] = 0 \quad (5.42)$$

also:

$$\boxed{\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} + \lambda_n \frac{\partial F_n}{\partial x_i}} \quad (5.44) \quad (5.44)$$

mit:

$$\frac{\partial F_n}{\partial x_i} = f_{ni} \quad (5.45)$$

• $\delta \vec{\lambda}(t)$ beliebig:

$$\frac{d}{d\varepsilon} S[\vec{x}(t), \vec{\lambda}(t) + \varepsilon \delta \vec{\lambda}] = 0 \quad (5.46)$$

also:

$$\boxed{F_n(\vec{x}, t) = 0} \quad (5.47) \quad (5.48)$$

mit Zwangskräften:

$$(F_z)_i = \lambda_n \frac{\partial F_n}{\partial x_i} \quad (5.49)$$

Auflösen der Zwangskräfte liefert:

$$x_i = x_i(q_1, \dots, q_k; t) \quad \text{mit } k = 3N - \Lambda \quad (5.50)$$

und damit gilt für die Tangentialvektoren:

$$\tau_{l,i} = \frac{\partial x_i}{\partial q_l} \quad (5.51)$$

Wir kontrahieren nun (5.44) mit τ :

$$\frac{\partial L}{\partial q_l} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} = 0 \quad (5.52)$$

mit $(\tau_{l,i})_i \lambda_n \widehat{\frac{\partial F_n}{\partial x_i}}^{\nu_{n,i}} = \lambda_n \frac{\partial F_n}{\partial q_l} = 0$:

Für (5.52) verwenden wir

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) \tau_{l,i} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \tau_{l,i} \right) - \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \frac{d}{dt} \tau_{l,i} \\ &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \frac{\partial x_i}{\partial q_l} + \frac{\partial L}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial q_l} \right) - \frac{dL}{\partial \dot{x}_i} \frac{d}{dt} \tau_{l,i} \\ &= \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} - \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_l} + \frac{\partial L}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial q_l} - \frac{\partial L}{\partial x_i} \tau_{l,i} \right) \\ &= \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} - \frac{\partial L}{\partial q_l} - \frac{\partial L}{\partial x_i} \tau_{l,i} \end{aligned} \quad (5.53)$$

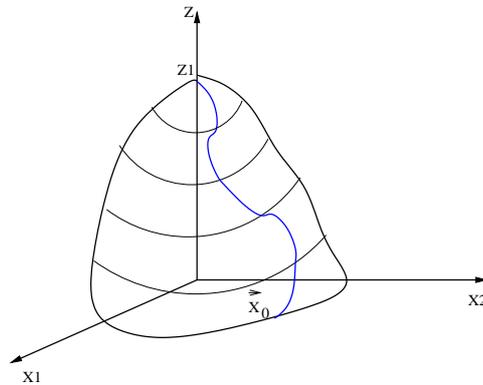


Abbildung 5.2: 1. Beispiel zur Variationsrechnung

Beispiele

1. Kürzester Weg: Minimierung von

$$S = \int_{t_0}^{t_1} dt I(\vec{x}, \dot{\vec{x}}; \tau) \quad (5.54)$$

mit

$$I = \sqrt{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + (\vec{\nabla}_{xz} \cdot \dot{\vec{x}})^2} \quad (5.55)$$

oder

$$I = \sqrt{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{z}^2} \quad (5.56)$$

Im Fall (5.55) ergibt sich: $q_1 = x_1, q_2 = x_2$:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial I}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial I}{\partial q_i} = 0 \quad \text{mit } i = 1, 2 \quad (5.57)$$

oder

$$\frac{d}{dt} \frac{\dot{x}_i + (\vec{\nabla}_x \cdot \dot{\vec{x}}) \frac{\partial z}{\partial x_i}}{I} - \frac{(\vec{\nabla}_{xz} \cdot \dot{\vec{x}}) \dot{x}_i \cdot \vec{\nabla} \frac{\partial z}{\partial x_i}}{I} = 0 \quad (5.58)$$

$$\leadsto \boxed{\frac{d}{dt} \frac{\dot{x}_i}{I} + \left(\frac{d}{dt} \frac{\dot{z}}{I} \right) \cdot \frac{\partial z}{\partial x_i} = 0} \quad (5.59)$$

Im Fall (5.56) ergibt sich: $q_1 = x_1, q_2 = x_2, q_3 = z$:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial I}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial I}{\partial q_i} + \lambda \frac{\partial f}{\partial q_i} = 0 \quad \text{mit } f(\vec{q}) = 0 \quad (5.60)$$

oder

$$\frac{d}{dt} \frac{\dot{x}_i}{I} - \lambda \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0 \quad (5.61)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\dot{z}}{I} - \lambda \frac{\partial f}{\partial z} = 0 \quad (5.62)$$

Auflösen liefert:

$$\lambda = \left(\frac{d}{dt} \frac{\dot{z}}{I} \right) \frac{1}{\frac{\partial f}{\partial z}} \quad (5.63)$$

und

$$\frac{d}{dt} \frac{\dot{x}_i}{I} - \left(\frac{d}{dt} \frac{\dot{z}}{I} \right) \frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}}{\frac{\partial f}{\partial z}} = 0 \quad (5.64)$$

Mit $f = z - z(\vec{x})$ erhält man:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = - \frac{\partial z(\vec{x})}{\partial x_i} \quad (5.65)$$

und

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 1 \quad (5.66)$$

Damit ergibt sich:

$$\frac{d}{dt} \frac{\dot{x}_i}{I} + \left(\frac{d}{dt} \frac{\dot{z}}{I} \right) \frac{\partial z}{\partial x_i} = 0 \quad (5.67)$$

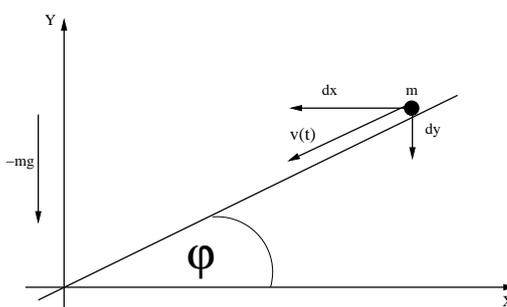


Abbildung 5.3: 2. Beispiel zur Variationsrechnung

$$2. \quad \frac{dy - v(t)dt}{dx} = \tan \varphi \quad (5.68)$$

Als Zwangsbedingung setzt man: $q_1 = x, q_2 = y$

Dann gilt:

$$-\sin \varphi dx + \cos \varphi dy - \cos \varphi v dt = 0 \quad (5.69)$$

Also: $\Lambda = 1, f_{11} = -\sin \varphi, f_{12} = \cos \varphi, f_{1t} = -\cos \varphi$

Holonom:

$$f_1 = -\sin \varphi \dot{x} + \cos \varphi \dot{y} - \cos \varphi v(t) \quad (5.70)$$

$$\Rightarrow F_1(x, y; t) = -\sin \varphi x + \cos \varphi y - \cos \varphi y_l(t) \quad (5.71)$$

Euler-Lagrangeleichungen:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} - \lambda f_{1i} = 0 \quad (5.72)$$

mit

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy \quad (5.73)$$

und

$$\vec{F}_z = \lambda \underbrace{\begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix}}_{\hat{e}_t} \quad (5.74)$$

$$m\ddot{x} + \lambda \sin \varphi = 0 \quad (5.75)$$

$$m\ddot{y} + mg - \lambda \cos \varphi = 0 \quad (5.76)$$

Zwangsbed.:

$$-\sin \varphi \ddot{x} + \cos \varphi \ddot{y} - \cos \varphi \dot{v} = 0 \quad (5.77)$$

Zwangskräfte durch Bestimmung von λ :

$$\begin{aligned} \sin \varphi(5.75) + \cos \varphi(5.76) &= m \underbrace{(-\sin \varphi \ddot{x} + \cos \varphi \ddot{y})}_{=\cos \varphi \dot{v} \text{ wegen (5.77)}} - \lambda + mg \cos \varphi \\ &= 0 \end{aligned} \quad (5.78)$$

$$\curvearrowright \boxed{\lambda = m(g + \dot{v}) \cos \varphi} \quad (5.79)$$

und damit:

$$\vec{F}_z = \lambda \vec{\nabla} F_1 = m(g + \dot{v}) \cos \varphi \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix} \quad (5.80)$$

Freier Fall: $\dot{v} = -g \curvearrowright \vec{F}_z = 0 \Rightarrow$ kräftefreie Bewegung

Kapitel 6

Symmetrien und Erhaltungssätze

Wir hatten schon bei den bisherigen physikalischen Problemen implizit die vorhandenen Symmetrien ausgenutzt. Zum Beispiel hatten wir bei der Behandlung des Keplerproblems die Drehimpulserhaltung verwendet, die mit der Invarianz der Bewegungsgleichungen unter Drehungen um den Ursprung $r = 0$ bei gegebenen rotationssymmetrischen Potential $V(r)$ zusammenhängt.

Im allgemeinen sprechen wir von einer Symmetrie, wenn die Bewegungsgleichungen, und damit die Physik unter einer Transformation der Koordinaten unverändert bleibt. Dies ist der Fall, wenn die Wirkung S invariant unter der entsprechenden Koordinatentransformation ist. Dann ist auch die Lösung der Bewegungsgleichungen invariant.

6.1 Symmetrien

Wir fassen diesen Zusammenhang zwischen Symmetrien und der Invarianz der Wirkung folgendermassen zusammen:

- (i) $\vec{q}(t) \rightarrow \vec{q}'(t)$ lässt Wirkung unverändert (bis auf Randterme). Das bedeutet für die Lagrangefunktion

$$\boxed{L(\vec{q}', \dot{\vec{q}}'; t) = L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}; t) + \frac{dF}{dt}(\vec{q}, \dot{\vec{q}}; t)} \quad (6.1)$$

mit

$$\begin{aligned} S[\vec{q}'(t)] &= \int_{t_0}^{t_1} dt L(\vec{q}', \dot{\vec{q}}'; t) = \int_{t_0}^{t_1} dt \left[L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}; t) + \frac{dF}{dt} \right] \\ &= \int_{t_0}^{t_1} dt L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}; t) + F(\vec{q}, \dot{\vec{q}}; t)|_{t_0}^{t_1}. \end{aligned}$$

Wir sehen, daß das eine Symmetrie keine Invarianz der Lagrangefunktion bedeutet, sondern (6.1); siehe Blatt 5, Aufgabe 2.

- (ii) Symmetrien schränken wegen (i) die Form der Lagrangefunktion und damit die Form der Wirkung ein:

Die Lagrangefunktion muss unter der Symmetrietransformation (6.1) erfüllen.

Beispiel: Freies Teilchen (Massenpunkt).

Aus dem 1. Newtonschen Axiom (Seite 12) und der Invarianz unter Galileitransformationen (Seite 7) folgt:

$$\begin{aligned}\vec{x}'(t) &= \mathcal{M}\vec{x}(t) - \vec{u} \cdot t - b_0, & \mathcal{M} &\in O(3) \\ \dot{\vec{x}}'(t) &= \mathcal{M}\dot{\vec{x}}(t) - \vec{u}\end{aligned}$$

Die Lagrangefunktion hängt für ein freies Teilchen nur von der Geschwindigkeit ab:

$$L = G(\dot{\vec{x}})$$

Einschränkungen:

- (a) Invarianz unter Drehungen $\dot{\vec{x}} \rightarrow \mathcal{M}\dot{\vec{x}}$

$$\Rightarrow L = L(\dot{\vec{x}}^2) \quad (\text{Drehimpulserhaltung})$$

ist invariant: $\dot{\vec{x}}^2 \rightarrow (\mathcal{M}\dot{\vec{x}})^2 = \dot{\vec{x}}^T \mathcal{M}^T \mathcal{M} \dot{\vec{x}} = \dot{\vec{x}}^2$. Für $G(\dot{\vec{x}})$ muss $G(\mathcal{M}\dot{\vec{x}}) - G(\dot{\vec{x}}) \stackrel{!}{=} \frac{dF}{dt}$ gelten. Dies ist nur möglich für $G(\dot{\vec{x}}) = \vec{a}\dot{\vec{x}} + L(\dot{\vec{x}}^2)$. Der erste Term $\vec{a}\dot{\vec{x}}$ ist eine totale Zeitableitung und trägt nicht zu den Bewegungsgleichungen bei. Wir setzen $\vec{a} = 0$.

- (b) Volle Galileitransformation: $\dot{\vec{x}}^2 \rightarrow \dot{\vec{x}}^2 - 2(\mathcal{M}\dot{\vec{x}})\vec{u} + O(\vec{u}^2)$ und damit in einer Taylorentwicklung um $\dot{\vec{x}}^2$:

$$\begin{aligned}L(\dot{\vec{x}}'^2) &= L(\dot{\vec{x}}^2) - 2\frac{\partial L(\dot{\vec{x}}^2)}{\partial \dot{\vec{x}}^2}(\mathcal{M}\dot{\vec{x}})\vec{u} + O(\vec{u}^2) \\ &\stackrel{!}{=} L(\dot{\vec{x}}^2) + \frac{dF}{dt}(\dot{\vec{x}}^2) + O(\vec{u}^2)\end{aligned}$$

Diese Bedingung ist nur zu erfüllen, wenn

$$\boxed{\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{x}}^2} = \text{konst.}}$$

und damit

$$L = c \cdot \dot{\vec{x}}^2, \quad c = \frac{1}{2}m.$$

- (c) Erweiterung auf ein System von Massepunkten:

$$L = \sum_i \frac{1}{2}m_i \dot{\vec{x}}_i^2$$

- (d) Potentiale $V(\|\dot{\vec{x}}_i - \dot{\vec{x}}_j\|)$ sind galileiinvariant, und damit ist die Wirkung mit der Lagrangefunktion

$$L = \sum_i \frac{1}{2}m_i \dot{\vec{x}}_i^2 - \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} V\|\dot{\vec{x}}_i - \dot{\vec{x}}_j\|$$

galileiinvariant.

6.2 Erhaltungsgrößen

Im letzten Kapitel hatten wir gesehen, daß die Forderung nach der Invarianz der Wirkung unter Symmetrietransformationen die Form der Lagrangefunktion einschränkt. Umgekehrt hat die Invarianz der Wirkung unter Symmetrietransformationen Erhaltungsgrößen zur Folge. Wir möchten das an einigen Beispielen illustrieren:

- (i) **Zyklische Koordinaten:** Eine Koordinate q_l , welche in der Lagrangefunktion nur durch \dot{q}_l auftritt,

$$L = L(q_1, \dots, q_{l-1}, q_{l+1}, \dots, q_k, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_l, \dots, \dot{q}_k; t).$$

nennt man **zyklisch**. Offensichtlich läßt

$$q_l(t) \rightarrow q_l(t) - u_l \quad \text{mit } \dot{u}_l = 0$$

die Lagrangefunktion und damit auch die Wirkung invariant.

Es gilt $\frac{\partial L}{\partial q_l} = 0$ für $l = 1, \dots, K$ und damit

$$\boxed{\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} = 0}$$

für Lösungen der Bewegungsgleichung \vec{q} mit $\frac{\partial L}{\partial q_l} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} = 0$.

Man nennt $p_l = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l}$ den **generalisierten Impuls**. Für zyklische Koordinaten ist der generalisierte Impuls eine Erhaltungsgröße.

Einfache Beispiele für zyklische Koordinaten sind

- (a) Beispiel auf Seite 69, Punkt 2: $L = L(\dot{x}^2)$, freies Teilchen und damit

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = m\dot{x}_i \quad \text{für } i = 1, \dots, 3$$

mit $\dot{p}_i = m\ddot{x}_i = 0$.

Dazugehörige Symmetrie: *Translation*

$$\vec{x} \rightarrow \vec{x} - \vec{b}_0$$

als Teil der Galileitransformation.

- (b) Zentralpotential im \mathbb{R}^2 : $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $r = \|\vec{x}\|$.

$$L(\vec{x}, \dot{\vec{x}}) = \frac{1}{2}m\dot{\vec{x}}^2 - V(r)$$

Verallgemeinerte Koordinaten: Polarkoordinaten r, φ mit $x_1 = r \cos \varphi$, $x_2 = r \sin \varphi$ und damit

$$L(r, \dot{r}, \dot{\varphi}) = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\varphi}^2 - V(r)$$

mit zyklischer Koordinate φ .

$$\Rightarrow p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2 \dot{\varphi} \quad \text{ist erhalten}$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}(mr^2 \dot{\varphi}) = 0}$$

Man erhält also gerade die Drehimpulserhaltung! Dies gilt auch in (1a) für den dreidimensionalen Drehimpuls:

$$\begin{array}{l} \text{Invarianzgruppe} \\ \text{Galileotransformation} \end{array} \left\{ \begin{array}{ll} (1) \quad \dot{\vec{p}} = 0 & \text{(Translation)} \\ (2) \quad \dot{\vec{l}} = 0 & \text{(Drehung)} \\ (3) \quad \vec{x} \rightarrow \vec{x} - \vec{u}t : L \rightarrow L + \frac{dF}{dt} & \text{(Boost)} \end{array} \right.$$

- (ii) **Energieerhaltung:** Wir betrachten Lagrangefunktionen ohne explizite Zeitabhängigkeit,

$$L = L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}).$$

Dann gilt

$$\boxed{\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L \right) = 0}$$

auf Lösungen \vec{q} der Bewegungsgleichungen. Das bedeutet, daß $E = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L$ erhalten ist.

Beweis:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L \right) = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i - \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial q_i} - \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}.$$

Mit den Bewegungsgleichungen $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i}$ folgt

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L \right) = \frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i - \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

Die Erhaltungsgröße E ist die Gesamtenergie. Allgemein ist die Lagrangefunktion durch

$$L = \overbrace{\sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{x}_i^2}^T - V(\vec{x})$$

gegeben. Mit $x_i = x_i(q_1, \dots, q_k)$, $\dot{x}_i = \frac{\partial x_i}{\partial q_l} \dot{q}_l$ und $m_{st}(\vec{q}) = \sum_i m_i \frac{\partial x_i}{\partial q_s} \frac{\partial x_i}{\partial q_t}$ können wir die Lagrangefunktion geeignet umparametrisieren,

$$L = \underbrace{\sum_{s,t} \frac{1}{2} m_{st}(\vec{q}) \dot{q}_s \dot{q}_t}_T - V(\vec{q})$$

Damit gilt

$$E = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} \dot{q}_l - L = \sum_{s,t} m_{st}(\vec{q}) \dot{q}_s \dot{q}_t - T + V = \frac{1}{2} \sum_{s,t} m_{st} \dot{q}_s \dot{q}_t + V = T + V$$

mit

$$\boxed{\dot{E} = 0}$$

6.3 Noethertheorem

In den letzten Kapiteln 6.1 bis 6.2 hatten wir die direkten Zusammenhänge zwischen Symmetrien und Erhaltungsgrößen an Hand von Beispielen diskutiert. Das Noethertheorem präzisiert diesen Zusammenhang.

Emmy Noether (1882-1935) leistete wichtige Beiträge in Algebra (Invarianztheorie); promovierte bei Paul Gordan.

1919 habilitiert in Göttingen (1915 Fehlversuch wegen Habilitationsordnung)

1923 bezieht Lehrauftrag

1933 Emigration in USA

Noethertheorem: Das Wirkungsfunktional

$$S[\vec{q}(t)] = \int_{t_0}^{t_1} dt L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}; t)$$

sei invariant (bis auf Randterme) unter einer globalen (t -unabhängigen), kontinuierlichen (differenzierbaren) Symmetrietransformation mit r Parametern $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ mit

$$\vec{q}(t) \rightarrow \vec{q}(\vec{\alpha}; t) \quad \text{mit } \vec{q}(0; t) = \vec{q}(t)$$

$$L(\vec{q}(t), \dot{\vec{q}}(t); t) \rightarrow L(\vec{q}(\vec{\alpha}; t), \dot{\vec{q}}(\vec{\alpha}; t); t)$$

Dann muß die Lagrangefunktion L bis auf eine totale Zeitableitung invariant sein,

$$L(\vec{q}(\vec{\alpha}; t), \dot{\vec{q}}(\vec{\alpha}; t); t) = L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}; t) + \alpha_s \frac{dR_s(\vec{q}(\vec{\alpha}; t), \dot{\vec{q}}(\vec{\alpha}; t); t)}{dt}, \quad (6.2)$$

und es gibt r Erhaltungsgrößen Q_s , $s = 1, \dots, r$, die für Lösungen \vec{q} der Bewegungsgleichungen \vec{q} zeitunabhängig sind,

$$\boxed{\left. \frac{dQ_s(\vec{q}, \dot{\vec{q}}; t)}{dt} \right|_{\text{Bew. gl.}} = 0 \quad s = 1, \dots, r}$$

$$\text{mit } \frac{\partial L}{\partial q_l} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} = 0 \quad l = 1, \dots, k.$$

Die Q_s werden **Noetherladungen** genannt.
Im Allgemeinen gilt bei Invarianz von S

$$\boxed{\left. \frac{dL}{d\alpha_s} \right|_{\vec{\alpha}=0} = \left. \frac{dR_s}{dt} \right|_{\vec{\alpha}=0}} \quad (6.3)$$

Dann ist die Erhaltungsgröße Q_s , die Noetherladung durch

$$\boxed{Q_s = \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial q_i}{\partial \alpha_s} \right|_{\vec{\alpha}=0} - R \Big|_{\vec{\alpha}=0}}$$

mit $\left. \frac{dQ_s}{dt} \right|_{\text{Bew.gl}} = 0$

(Beispiele 6-9a)

Beweis: Sei $\vec{q}(t)$ eine Lösung der Bewegungsgleichungen und $\vec{q}(\vec{\alpha}(t); t)$ eine t -abhängige Transformation von \vec{q} mit $\vec{q}(0; t) = \vec{q}(t)$ eine Lösung der Bewegungsgleichung. Außerdem gelte $\alpha(t_0) = \alpha(t_1) = 0$. Man kann

$$\hat{S}[\vec{\alpha}(\vec{t})] := S(\vec{q}(\vec{\alpha}(\vec{t}); t)) \quad (6.4)$$

als Wirkungsfunktional mit Koordinaten $\alpha(t)$ verstehen. Dieses Funktional hat ein Minimum bei $\alpha = 0$, da $S[\vec{q}(0, t)] = S[\vec{q}(t)]$ minimal ist. Sei nun $\alpha(t) = \varepsilon \delta \alpha(t)$ ein beliebiges infinitesimales α . Aus dem Hamiltonschen Prinzip folgt dann

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \hat{S}[\varepsilon \delta \vec{\alpha}(t)] = \int_{t_0}^{t_1} dt \delta \alpha_s(t) \left[\frac{\partial L}{\partial \alpha_s} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}_s} \right]_{\vec{\alpha}=0} = 0. \quad (6.5)$$

Mit Gleichung 6.3 folgt

$$\boxed{\int_{t_0}^{t_1} dt \delta \alpha_s(t) \left[\frac{dR_s}{dt} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}_s} \right]_{\vec{\alpha}(t)=0} = 0.} \quad (6.6)$$

Gleichung 6.6 gilt für beliebige $\delta \alpha_s(t)$ und wir erhalten

$$\left. \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L(\vec{q}(\vec{\alpha}; t), \frac{d\vec{q}(\vec{\alpha}; t)}{dt}; t)}{\partial \dot{\alpha}_s(t)} - R_s \right] \right|_{\vec{\alpha}=0} = 0. \quad (6.7)$$

Die $\dot{\alpha}_s$ -Abhängigkeiten können unter Benutzung von $\frac{\partial q_i}{\partial \dot{\alpha}_s} = 0$ geeignet umparametrisiert werden:

$$\frac{d\vec{q}(\vec{\alpha}; t)}{dt} = \dot{\alpha}_s \frac{\partial \vec{q}}{\partial \alpha_s} + \frac{\partial \vec{q}}{\partial t},$$

und damit

$$\frac{\partial \vec{q}}{\partial \dot{\alpha}_s} = \frac{\partial \vec{q}}{\partial \alpha_s}.$$

Der erste Term in (6.7) kann nun als eine Kombination aus q -Ableitungen von L umgeschrieben werden. Dazu verwenden wir

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}_s} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} \frac{\partial \dot{q}_l}{\partial \dot{\alpha}_s} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} \frac{\partial q_l}{\partial \alpha_s}$$

Mit diesen Vorbereitungen folgt der behauptete Erhaltungssatz aus Gleichung 6.7,

$$\boxed{\frac{d}{dt} Q_s = 0} \quad (6.8)$$

$$\text{mit } \boxed{Q_s = \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} \frac{\partial q_l}{\partial \alpha_s} \right|_{\alpha=0} - \left. R_s \right|_{\vec{\alpha}=0}}. \quad (6.9)$$

Bemerkung: Die Konstruktion beinhaltet auch Transformationen in der Zeit $t \rightarrow t'(t)$. Das kann umgeschrieben werden als Transformation der Felder:

$$q(t) \rightarrow q(t') =: q'(t) = q(\alpha, t).$$

Gilt

$$\left. \frac{dL}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} = \left. \frac{dR}{dt} \right|_{\alpha=0},$$

dann gilt das Noethertheorem.

Beispiel: $t \rightarrow t' = t + \alpha$ (Translation in der Zeit).

$$q(t) \rightarrow q(t') = q(t + \alpha) = q(\alpha, t)$$

und $L \rightarrow L(q(\alpha; t), \dot{q}(\alpha; t); t)$

$$\left. \frac{dL}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} = \left. \frac{dL}{dt} \right|_{\alpha=0}$$

wenn L nicht explizit von der Zeit abhängig ist, d.h. $\frac{\partial L}{\partial t} = 0!$

$$\Rightarrow \boxed{Q = \dot{q}_l \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} - L = E}$$

Beispiele: Freie Teilchen in 2 und 3 Dimensionen.

- Translation (im \mathbb{R}^2):

$$\vec{x}(t) \rightarrow \vec{x}(t) + \vec{b} = \vec{x}(\alpha; t) \text{ mit}$$

$$\alpha_1 = b_1, \quad \alpha_2 = b_2, \quad \alpha_3 = b_3.$$

Es gilt $L(\vec{x}(\vec{\alpha}; t)) = L(\vec{x}(t))$

$$\Rightarrow \frac{dL}{d\alpha_s} = 0 \quad \text{mit } s = 1, 2, 3.$$

Noetherladung:

$$Q_s = \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \frac{dx_i(\vec{\alpha}; t)}{d\alpha_s} \right|_{\vec{\alpha}=0} = m\dot{x}_i \delta_{is} = m\dot{x}_s.$$

Die Noetherladungen Q_s sind die Komponenten des Impulses.

Impulserhaltung: $\dot{Q}_s = m\ddot{x}_s = 0$. Das sind die Bewegungsgleichung für die Koordinaten x_s .

- Rotation (im \mathbb{R}^2):

$\vec{x}(t) \rightarrow \mathcal{M}(\alpha)\vec{x}(t) = \vec{x}(\alpha; t)$ mit

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

Es gilt $L(\dot{\vec{x}}(\alpha; t)) = L(\dot{\vec{x}}(t))$

$$\Rightarrow \frac{dL}{d\alpha} = 0.$$

Noetherladung:

$$Q = \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}_i} \frac{\partial x_i(\alpha; t)}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0}.$$

Mit $\left. \frac{d\mathcal{M}(\alpha)}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ folgt

$$\begin{aligned} &= m\dot{\vec{x}} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \vec{x} \\ &= m(\dot{x}_2 x_1 - \dot{x}_1 x_2) \\ &= mr^2 \dot{\varphi} + (m\dot{r}r(\sin \varphi \cos \varphi - \cos \varphi \sin \varphi)) \\ Q &= mr^2 \dot{\varphi} \quad \text{Drehimpuls.} \end{aligned}$$

Erhaltung:

$$\dot{Q} = \frac{d(mr^2 \dot{\varphi})}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = 0$$

(Bewegungsgleichung für φ).

Die Drehimpulserhaltung folgt auch aus der Impulserhaltung:

$$\frac{d}{dt}(m\dot{x}_2 x_1 - \dot{x}_1 x_2) = m\ddot{x}_2 x_1 - m\ddot{x}_1 x_2 \stackrel{\text{Impulserhaltung}}{=} 0.$$

- Zeittranslation: $\vec{x}(t) \rightarrow \vec{x}(t + \alpha) = \vec{x}(\alpha; t)$.

Es gilt

$$\left. \frac{dL}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} = \frac{dL}{dt} \Rightarrow R = L.$$

Noetherladung:

$$\begin{aligned} Q &= \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \frac{dx_i}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} - L \\ &= \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \dot{x}_i - L \\ &= \frac{1}{2} m \dot{x}^2 = E. \end{aligned}$$

Erhaltung:

$$\frac{dE}{dt} = m \dot{x} \ddot{x} = 0.$$

Wir haben in den Beispielen gesehen, daß die Erhaltungssätze mit einem Teil der Bewegungsgleichungen in Verbindung stehen. Zum Abschluß dieses Kapitels soll das Noethertheorem noch einmal durch eine etwas andere Argumentation begründet werden, die diesen Zusammenhang unterstreicht. Eine Symmetrietransformation kann dazu benutzt werden, um einen Teil der Koordinaten q_l zu ersetzen,

$$q_l = q_l(q'_1, \dots, q'_K), \quad \text{mit } q'_s = \alpha_s \quad s = 1, \dots, r, \quad (6.10)$$

und Tangentialvektoren $\tau_{s,i} = \frac{\partial q_i}{\partial q'_s}$, siehe Kapitel 4.1.2. In Anlehnung an die dortige Konstruktion projizieren die Bewegungsgleichungen auf die neuen Koordinaten $q'_s = \alpha_s$ für $s = 1, \dots, r$ mit

$$\tau_{s,i} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} \right) = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}_s} - \frac{\partial L}{\partial \alpha_s} = 0. \quad (6.11)$$

Das ist gerade die Bewegungsgleichung für die Koordinate α_s in (6.5). Sie wird durch q' mit $\vec{\alpha} = 0$ gelöst und das Noethertheorem folgt. Der Erhaltungssatz folgt direkt aus der Projektion der Bewegungsgleichung auf die Koordinaten α_s .

Kapitel 7

Starrer Körper

Wir möchten ein System von Massenpunkten m_i , $i = 1, \dots, N$ oder eine kontinuierliche Massenverteilung mit Massendichte $\rho(\vec{v})$ beschreiben, z.B. eine rollende Scheibe.

Starr bedeutet hier

$$\|\vec{r}_i - \vec{r}_j\| = R_{ij} \quad (7.1)$$

mit R_{ij} konstant, $i, j = 1, \dots, N$ für ein System von N Massenpunkten.

Bei einer kontinuierlichen Massenverteilung bedeutet starr, dass für ein geeignetes Koordinatensystem gilt

$$\frac{d\rho(\vec{x})}{dt} = 0 \quad (7.2)$$

7.1 Trägheitsmoment und Trägheitstensor

In einem geeigneten System: Scheibe

ABBILDUNG

x_1, x_2, x_3 sind ausgezeichnete Achsen des starren Körpers. Wir können Rotationen der Scheibe um eine beliebige Achse A als eine kombinierte Drehung um alle Achsen x_1, x_2, x_3 sehen, mit Winkelgeschwindigkeiten $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$.

Wir möchten die kinetische Energie dieser Drehungen durch die Winkelgeschwindigkeiten $\dot{\varphi}_i$ und Parameter des Problems ausdrücken: $T = \frac{1}{2} J_{ij} \dot{\varphi}_i \dot{\varphi}_j$.

siehe FEHLT

7.1.1 Einfaches Beispiel - Massenpunkt an Stange und Drehung um x_3 -Achse

Die kinetische Energie ist durch

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 = \frac{1}{2} m (x_1^2 + x_2^2) \omega^2 = \frac{1}{2} J_{x_3} \omega^2 \quad (7.3)$$

mit Kreisfrequenz $\omega = \dot{\varphi}$ und Trägheitsmoment $J_{x_3} = m(x_1^2 + x_2^2)$ um die x_3 -Achse gegeben.

7.1.2 Rotierende Scheibe um x_3 -Achse

Trägheitsmoment J_{x_3} : konstante Massendichte ρ und Gesamtmasse $M = \int d^3x \rho(\vec{r}) = \int \rho d^3x$

7.1.3 Allgemein

Trägheitsmoment J bei einer Drehung um x_3 -Achse: $\varphi = \varphi_3$

$$J_{x_3} = \int d^3x \rho(\vec{x}) \frac{\partial x_i}{\partial \varphi} \frac{\partial x_i}{\partial \varphi} \quad (7.4)$$

$$= \int d^3x \rho(\vec{x}) (x_1^2 + x_2^2) \quad (7.5)$$

mit

$$\vec{x} = r \begin{pmatrix} \cos \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi \sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} \quad (7.6)$$

und

$$\frac{\partial \vec{x}}{\partial \varphi} = r \sin \theta \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \quad (7.7)$$

und damit ist $\left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial \varphi}\right)^2 = x_1^2 + x_2^2$

7.1.4 Allgemein bei einer Drehung um die Achse A

$$J_A = \int d^3x \rho(\vec{x}) \vec{x}_\perp^2 \quad (7.8)$$

Betrachte nun eine solche allgemeine Drehachse A:

Schwerpunkt: $\int d^3x \rho(\vec{x}) (\vec{x} - \vec{R}_s) = 0$

$$J_A = \int d^3x \rho(\vec{x}) \vec{x}_\perp^2 = \int d^3x \rho(\vec{x}) (\vec{R}_{s_\perp} + \vec{x}_{s_\perp})^2 \quad (7.9)$$

$$= \int d^3x \rho(\vec{x}) (\vec{R}_{s_\perp}^2 + 2\vec{R}_{s_\perp} \vec{x}_{s_\perp} + \vec{x}_{s_\perp}^2) \quad (7.10)$$

$$= \int d^3x \rho(\vec{x}) (\vec{R}_{s_\perp}^2 + \vec{x}_{s_\perp}^2) \quad (7.11)$$

mit

$$\int d^3x \rho(\vec{x}) \vec{R}_{s_\perp} \vec{x}_{s_\perp} = \vec{R}_{s_\perp} \int d^3x \rho(\vec{x}) \vec{x}_{s_\perp} = 0 \quad (7.12)$$

und damit ergibt sich, mit Gesamtmasse $M = \int d^3x \rho(\vec{x})$, der Steinersche Satz

$$J_A = M \vec{R}_{s_{\text{enkr}}}^2 + J_s \quad (7.13)$$

mit Schwerpunktsdrehmoment

$$J_s = \int d^3x \rho(\vec{x}) \vec{x}_{s\perp}^2 \quad (7.14)$$

Schwerpunkt: $\int d^3x \rho(\vec{x}) (\vec{x} - \vec{R}_s) = 0$

$$\vec{R}_s = \int d^3x \rho(\vec{x}) \vec{x} \quad (7.15)$$

mit $\vec{x} = \vec{x}_s + \vec{R}_s$ und $\vec{x}_\perp = \vec{x}_{s\perp} + \vec{R}_{s\perp}$

7.1.5 Allgemeine Bewegung eines starren Körpers

Kinetische Energie:

$$T = \frac{1}{2} \int d^3x \rho(\vec{x}) \dot{\vec{x}}^2 \quad (7.16)$$

$$= \frac{1}{2} \int d^3x \rho(\vec{x}) (\dot{\vec{R}}_I + \dot{\vec{x}}_I)^2 \quad (7.17)$$

$$= \frac{1}{2} \int d^3x \rho(\vec{x}) (\dot{\vec{R}}_I^2 + 2\dot{\vec{R}}_I \dot{\vec{x}}_I + \dot{\vec{x}}_I^2) \quad (7.18)$$

Vereinfachung: Sei I das Schwerpunktsystem S

$$T = \frac{1}{2} \int d^3x \rho(\vec{x}) (\dot{\vec{R}}_S^2 + 2\dot{\vec{R}}_S \dot{\vec{x}}_S + \dot{\vec{x}}_S^2) \quad (7.19)$$

$$= \frac{1}{2} M \dot{\vec{R}}_S^2 + \frac{1}{2} J_{Sij} \dot{\varphi}_i \dot{\varphi}_j \quad (7.20)$$

mit Trägheitstensor

$$J_{Sij} = \int d^3x \rho(\vec{x}) \frac{\partial \vec{x}_S}{\partial \varphi_i} \frac{\partial \vec{x}_S}{\partial \varphi_j} \quad (7.21)$$

Die Definition des Trägheitstensors J_{ij} ist total symmetrisch, $J_{ij} = J_{ji}$, und keine Achse ist ausgezeichnet. Wir bestimmen zunächst die Diagonalkomponenten exemplarisch mit $i = j = 3$:

$$\frac{\partial \vec{x}}{\partial \varphi_3} \frac{\partial \vec{x}}{\partial \varphi_3} = \vec{x}^2 - x_3^2 \quad (7.22)$$

$$\implies \frac{\partial \vec{x}}{\partial \varphi_i} \frac{\partial \vec{x}}{\partial \varphi_i} = \vec{x}^2 - x_i^2 \quad (7.23)$$

Sei nun $i \neq j$ mit $i = 2, j = 3$:

$$\frac{\partial \vec{x}}{\partial \varphi_3} \frac{\partial \vec{x}}{\partial \varphi_2} = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \\ 0 \\ -x_1 \end{pmatrix} = -x_2 x_3 \quad (7.24)$$

mit

$$\vec{x}_s = r \begin{pmatrix} \cos \varphi_3 \sin \theta_3 \\ \sin \varphi_3 \sin \theta_3 \\ \cos \theta_3 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \sin \varphi_2 \sin \theta_2 \\ \cos \theta_2 \\ \cos \varphi_2 \sin \theta_2 \end{pmatrix} \quad (7.25)$$

also folgt für $i \neq j$

$$\implies \frac{\partial \vec{x}}{\partial \varphi_i} \frac{\partial \vec{x}}{\partial \varphi_j} = -x_i x_j \quad (7.26)$$

und damit

$$\frac{\partial \vec{x}}{\partial \varphi_i} \frac{\partial \vec{x}}{\partial \varphi_j} = \vec{x}^2 \delta_{ij} - x_i x_j \quad (7.27)$$

Der Trägheitstensor folgt als

$$J_{ij} = \int d^3 x \rho(\vec{x}) (\vec{x}^2 \delta_{ij} - x_i x_j) \quad (7.28)$$

insbesondere für J_{Sij} .

Bemerkung: Für einen Körper mit fixer Drehachse A: I \Rightarrow A-System.

Um die jeweiligen Transformationen in das Schwerpunktsystem oder andere geeignete Koordinatensysteme durchzuführen, benötigen wir eine Beschreibung solcher allgemein beschleunigter Bezugssysteme und der darin auftretenden Kräfte.

7.2 Beschleunigte Bezugssysteme

\vec{x}' : Inertialsystem

\vec{x} : Körperfestes System

Transformation: $\vec{x}'(t) = M(t)\vec{x}(t) - \vec{u}(t)$

Wir fangen mit reinen Drehungen an: $\vec{u} = 0$

Es gilt:

$$\dot{\vec{x}}' = \dot{M}\vec{x} + M\dot{\vec{x}} \quad (7.29)$$

Zur Berechnung von \dot{M} benötigen wir infinitesimale Drehungen. Wir benutzen, dass $M \in O(3)$:

$$MM^T = 1 \quad (7.30)$$

Infinitesimal:

$$M = 1 + \varepsilon\Omega \quad (7.31)$$

mit der Bedingung

$$MM^T = 1 + \varepsilon(\Omega + \Omega^T) = 1 \quad (7.32)$$

und damit $\Omega = -\Omega^T$, Ω antisymmetrisch, $\Omega_{ij} = -\Omega_{ji}$
Das sind drei unabhängige Einträge:

$$\Omega_{12} = -\Omega_{21} \quad (7.33)$$

$$\Omega_{31} = -\Omega_{13} \quad (7.34)$$

$$\Omega_{23} = -\Omega_{32} \quad (7.35)$$

da $\Omega_{ii} = 0 \forall i = 1, 2, 3$.

Wir parametrisieren

$$\Omega = -\sum_{i=1}^3 \varphi_i l^i \quad (7.36)$$

mit $(l^i)_{jk} = \varepsilon_{ijk}$, also

$$l^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (7.37)$$

$$l^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (7.38)$$

$$l^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (7.39)$$

Die l^i erzeugen Drehungen um die Koordinatenachsen x_i ! Dazu betrachten wir eine Drehung um die x_3 -Achse: $\varphi_3 = \varphi$

$$M(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (7.40)$$

Taylorentwicklung von M in φ um $\varphi = 0$:

$$M(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \quad (7.41)$$

$$\frac{\partial M}{\partial \varphi}(0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -l^3 \quad (7.42)$$

$$\frac{\partial^2 M}{\partial \varphi^2}(0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (-l^3)^2 \quad (7.43)$$

Also allgemein:

$$\frac{\partial^n M}{\partial \varphi^n}(0) = (-l^3)^n \quad (7.44)$$

und damit

$$M(\varphi) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} (-l^3)^n \varphi^n = e^{-\varphi l^3} \quad (7.45)$$

und allgemein mit $\vec{\varphi} = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{pmatrix}$, $\vec{l} = \begin{pmatrix} l^1 \\ l^2 \\ l^3 \end{pmatrix}$

$$M(\vec{\varphi}) = e^{-\vec{\varphi} \vec{l}} = \exp \left(\sum_i \varphi_i l_i \right) \quad (7.46)$$

$M(\vec{\varphi})$ erfasst alle Drehungen!

Wichtige Eigenschaften der Erzeugenden l^i :

$$l^1 l^2 - l^2 l^1 = -l^3 \quad (7.47)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (7.48)$$

Allgemein ($AB - BA = [A, B]$), Lie-Algebra der $SO(3)$

$$[l^i, l^j] = -\varepsilon_{ijk} l^k \quad (7.49)$$

Beweis (mit $\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ilm} = \delta_{jl} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{kl}$)

$$\varepsilon_{ilm} \varepsilon_{jmn} - \varepsilon_{jlm} \varepsilon_{imn} = -\varepsilon_{mil} \varepsilon_{mjn} + \varepsilon_{min} \varepsilon_{mjn} \quad (7.50)$$

$$= -\delta_{ij} \delta_{ln} + \delta_{in} \delta_{jl} + \delta_{ij} \delta_{ln} - \delta_{il} \delta_{jn} \quad (7.51)$$

$$= \delta_{in} \delta_{jl} - \delta_{il} \delta_{jn} \quad (7.52)$$

$$= -\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{kln} \quad (7.53)$$

Damit berechnen wir die Geschwindigkeit $\dot{\vec{x}}'(\vec{x})$ bei einer zeitunabhängigen Drehung des Koordinatensystems:

Sei $\vec{\varphi} = t\vec{\omega}'$, gleichmäßig, konstante Drehachse.

$$M(\vec{\varphi}) = \exp(-t\omega'_i l^i) \quad (7.54)$$

$$\frac{dM}{dt} = -\vec{\omega}' \vec{l} M(\vec{\varphi}) \quad (7.55)$$

Es folgt (mit $\vec{w}' = M\vec{w}$)

$$\frac{d}{dt}\vec{x}' = \frac{d}{dt}M\vec{x} = -(\vec{w}'\vec{l})\vec{x}' + M\dot{\vec{x}} \quad (7.56)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}(M\vec{x})_j = -w'_i \varepsilon_{ijk} \vec{x}'_k + (M\dot{\vec{x}})_j \quad (7.57)$$

$$= (\vec{w}' \times \vec{x}')_j + (M\dot{\vec{x}})_j \quad (7.58)$$

$$= (M\vec{w} \times M\vec{x})_j + (M\dot{\vec{x}})_j \quad (7.59)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}M\vec{x} = M(\vec{w} \times \vec{x}) + M\dot{\vec{x}} \quad (7.60)$$

Allgemein mit $\vec{u} \neq 0$

$$\boxed{\dot{\vec{x}}' = M(\vec{\omega} \times \vec{x} + \dot{\vec{x}}) - M^{-1}\dot{\vec{u}}} \quad (7.61)$$

Allgemein: Parametrisiere

$$M(t) = \Delta M(t - t_o)M(t_o) \quad (7.62)$$

und damit

$$\left. \frac{dM}{dt} \right|_{t=t_o} = \left. \frac{d\Delta M}{dt} \right|_{t=0} M(t_o) \quad (7.63)$$

mit

$$\Delta M = 1 - (t - t_o)(\vec{\omega}'\vec{l}) + o((t - t_o)^2) \quad (7.64)$$

mit momentaner Drehgeschwindigkeit $\vec{\omega}'$ des Systems \vec{x} in \vec{x}' .

$$\Rightarrow \left. \frac{dM}{dt} \right|_{t=t_o} = -(\vec{\omega}'\vec{l})M \quad (7.65)$$

und damit

$$\dot{M}\vec{x} = -\vec{\omega}'\vec{l}M\vec{x} = M(\vec{\omega} \times \vec{x}) \quad (7.66)$$

7.2.1 Bewegungsgleichungen im \vec{x} -System

Für die Bewegungsgleichungen im \vec{x} -System brauchen wir $\ddot{\vec{x}}'$: $m\ddot{\vec{x}}' = \vec{F}'$

$$\ddot{\vec{x}}' = \frac{d^2}{dt^2}M\vec{x} = \frac{d}{dt}(\dot{M}\vec{x} + M\dot{\vec{x}}) \quad (7.67)$$

für $\ddot{\vec{u}} = 0$.

$$\Rightarrow \ddot{\vec{x}}' = \frac{d}{dt}(M(\vec{w} \times \vec{x}) + M\dot{\vec{x}}) \quad (7.68)$$

$$= M(\vec{w} \times (\vec{w} \times \vec{x})) + M(\dot{\vec{w}} \times \vec{x}) + M(\vec{w} \times \dot{\vec{x}}) + M(\vec{w} \times \dot{\vec{x}}) + M\ddot{\vec{x}} \quad (7.69)$$

$$= M(\ddot{\vec{x}} + \vec{w} \times (\vec{w} \times \vec{x}) + 2\vec{w} \times \dot{\vec{x}} + \dot{\vec{w}} \times \vec{x}) \quad (7.70)$$

\Rightarrow Bewegungsgleichungen im \vec{x} -System: \vec{u} beliebig, $\vec{x}' = M\vec{x} - \vec{u}$ und $F = M^{-1}F'$

$$\boxed{m\ddot{\vec{x}} = F - m \left(M^{-1}\ddot{\vec{u}} + \vec{w} \times (\vec{w} \times \vec{x}) + 2\vec{w} \times \dot{\vec{x}} + \dot{\vec{w}} \times \vec{x} \right)} \quad (7.71)$$

Zentrifugalkraft

$$(\vec{w} \times (\vec{w} \times \vec{x}))_i = \varepsilon_{ijk}\omega_j\varepsilon_{klm}\omega_l x_m \quad (7.72)$$

$$= (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl})\omega_j\omega_l x_m \quad (7.73)$$

$$= \omega_i r^2 \vec{w} - x_i \vec{w}^2 \quad (7.74)$$

$\vec{x} \perp \vec{w}$: $\vec{F}_{\text{zentrifugal}} = m\omega^2 \vec{x}$ (siehe Keplerproblem)

Corioliskraft: $\dot{\vec{x}} \perp \vec{w}$

$$\Rightarrow \vec{F}_{\text{Coriolis}} = -2m\|\vec{w}\|\|\dot{\vec{x}}\|\hat{e}_w \times \hat{e}_{\dot{\vec{x}}} \quad (7.75)$$

7.3 Eigenschaften des Trägheitstensors

Wähle körperfestes Koordinatensystem: $\dot{\vec{x}} = 0$ und damit

$$\dot{\vec{x}}' = M(\vec{w} \times \vec{x} - M^{-1}\dot{\vec{u}}) \quad (7.76)$$

Kinetische Energie

$$T = \frac{1}{2} \int d^3x \rho(\vec{x}) \dot{\vec{x}}^2 \quad (7.77)$$

$$= \frac{1}{2} \int d^3x \rho(\vec{x}) \left((\vec{w} \times \vec{x})^2 + \dot{\vec{u}}^2 - 2(\vec{w} \times \vec{x})\dot{\vec{u}} \right) \quad (7.78)$$

$$= \frac{1}{2} \int d^3x \rho(\vec{x}) \left((\vec{w} \times \vec{x})^2 + \dot{\vec{u}}^2 \right) \quad (7.79)$$

falls \vec{x} -System Schwerpunktsystem

$$\int d^3x \rho(\vec{x}) (\vec{\omega} \times \vec{x}) \dot{\vec{u}} = \vec{\omega} \times \left(\int d^3x \rho(\vec{x}) \vec{x} \right) \dot{\vec{u}} = 0 \quad (7.80)$$

oder $\dot{\vec{u}} = 0$.

Es gilt

$$(\vec{\omega} \times \vec{x})^2 = \varepsilon_{ijk} \omega_j x_k \varepsilon_{ilm} \omega_l x_m \quad (7.81)$$

$$= (\delta_{jl} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{kl}) \omega_j x_k \omega_l x_m \quad (7.82)$$

$$= (\delta_{jl} \vec{x}^2 - x_j x_l) \omega_j \omega_l \quad (7.83)$$

und damit

$$\boxed{T = \frac{1}{2} J_{Sjl} \omega_j \omega_l + \frac{1}{2} \nu \dot{\vec{u}}^2} \quad (7.84)$$

mit $\nu = \int d^3x \rho(\vec{x})$ Gesamtmasse und $J_{il} = \int d^3x \rho(\vec{x}) (\delta_{il} \vec{x}^2 - x_i x_l)$.
Offensichtlich ist J symmetrisch

$$\boxed{J_{il} = J_{li}} \quad (7.85)$$

und damit diagonalisierbar!

Unter einer Drehung des körperfesten Systems

$$S \rightarrow S' \quad (7.86)$$

mit der Transformation eines Tensors erster Stufe (Vektor)

$$\vec{x} \rightarrow \vec{x}' = M \vec{x} \quad (7.87)$$

$$\vec{\omega} \rightarrow \vec{\omega}' = M \vec{\omega} \quad (7.88)$$

transformiert sich ($\dot{\vec{u}} = 0$) die kinetische Energie

$$T = T' = \frac{1}{2} J_{Sjl} M_{jn}^{-1} \omega'_n M_{lm}^{-1} \omega'_m \quad (7.89)$$

$$= \frac{1}{2} (M_{nj} J_{Sjl} M_{lm}^T) \omega'_n \omega'_m \quad (7.90)$$

$$= \frac{1}{2} J'_{Snm} \omega'_n \omega'_m \quad (7.91)$$

mit

$$J_{s'} = M J M^T \quad (7.92)$$

oder

$$\boxed{J_{S'nm} = M_{nj}M_{ml}J_{Sjl}} \quad (7.93)$$

Transformationsverhalten eines Tensors 2. Stufe!
Benutze kat. M zur Diagonalisierung!

$$J_{S'nm} = \int d^3x \rho(\vec{x})(\vec{x}'^2 \delta_{nm} - x'_n x'_m) \quad (7.94)$$

$$= \int d^3x \rho(\vec{x})(\vec{x}^2 \delta_{nm} - M_{nj}M_{ml}x_j x_l) \quad (7.95)$$

$$= M_{nj}M_{ml} \int d^3x \rho(\vec{x})(\vec{x}^2 \delta_{jl} - x_j x_l) \quad (7.96)$$

mit $M_{nj}M_{ml}\delta_{jl} = M_{nl}M_{lm}^T = \delta_{nm}$ und damit VERWEIS.

Nebenvemerkung Wir haben benutzt, M Drehung, $R \in SO(3)$

$$(M\vec{v}) \times (M\vec{\omega}) = M(\vec{v} \times \vec{\omega}) \quad (7.97)$$

also $\vec{v} \times \vec{\omega}$ transformiert als Vektor.
Aber bei $\vec{v} \rightarrow -\vec{v}$ (Punktspiegelung)

$$\vec{v} \times \vec{\omega} \rightarrow \vec{v} \times \vec{\omega} \quad (7.98)$$

Man nennt allgemein \vec{A} mit $\vec{A} \rightarrow \vec{A}$ bei Spiegelung Pseudovektoren. Beispiel
Drehimpuls: $m\vec{x} \times \dot{\vec{x}}$

Mit VERWEIS gibt es ein Koordinatensystem D in dem J diagonal ist.

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 \end{pmatrix} \quad (7.99)$$

J_1, J_2, J_3 heißen Hauptträgheitsmomente.

Die Koordinatenachsen von D heißen Hauptträgheitsachsen.

Beispiel

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 \end{pmatrix} \quad (7.100)$$

bleibt diagonal unter $M = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Hauptträgheitsachsen: $\hat{e}_{x1}, \hat{e}_{x2}, \hat{e}_{x3}$

Allgemein: \hat{e}_i Eigenvektor von J

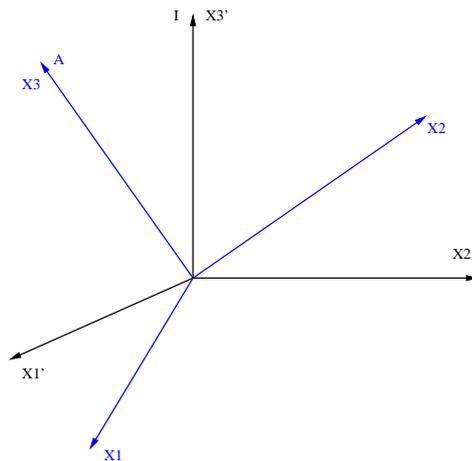
$$J\hat{e}_i = J_i\hat{e}_i \quad (7.101)$$

\hat{e}_i Hauptträgheitsachse mit J_i Hauptträgheitsmoment.

Kapitel 8

Kreisel

Wir verwenden die Ergebnisse des letzten Kapitels, um die Rotation eines Körpers um einen festen Punkt zu beschreiben. Dabei ist **I** das **Intertialsystem** (raumfest) und **A** das **körperfeste System**.



Mit $\vec{x}'(t) = R(t) \cdot \vec{x}(t)$.

8.1 Eulersche Bewegungsgleichungen

Der Drehimpuls ist durch

$$\vec{L}' = R \cdot \vec{L} \quad (8.1)$$

gegeben. Die Änderung des Drehimpulses \vec{L}' ist das Drehmoment \vec{N}' mit:

$$\vec{N}' = \dot{\vec{L}}' \quad (8.2)$$

$$\vec{N}' = R \cdot \vec{N} \quad (8.3)$$

Dabei ist $\vec{N} = \int d^3x' \rho(x') \vec{x}' \times \ddot{\vec{x}}'$. Das übersetzt sich im körperfesten System in:

$$\dot{\vec{L}}' = \frac{d}{dt}(R\vec{L}) = R(\vec{\omega} \times \vec{L}) + R\dot{\vec{L}} \quad (8.4)$$

$$= R\vec{N} \quad (8.5)$$

$$\Rightarrow \dot{\vec{L}} = \vec{N} - \vec{\omega} \times \vec{L} \quad (8.6)$$

Der Trägheitstensor J im körperfesten System ist zeitunabhängig: $\dot{J} = 0$. Damit folgt:

$$\dot{\vec{L}} = \frac{d}{dt}(J \cdot \vec{\omega}) \quad (8.7)$$

$$= J\dot{\vec{\omega}} \quad (8.8)$$

Mit (8.6) sowie (8.8) folgen die **Eulerschen Bewegungsgleichungen**:

$$\boxed{J\dot{\vec{\omega}} = \vec{N} - \vec{\omega} \times J \cdot \vec{\omega}} \quad (8.9)$$

Diese Gleichungen sind im Hauptachsensystem besonders einfach:

$$J_{ij} = J_i \delta_{ij} \quad (8.10)$$

$$J = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix} \quad (8.11)$$

$$I_i \dot{\omega}_i = N_i - \sum_{j,k} \varepsilon_{ijk} \omega_j (I_k \omega_k) \quad (8.12)$$

$$\Rightarrow \boxed{I_i \dot{\omega}_i = N_i - \frac{1}{2} \sum_{j,k} \varepsilon_{ijk} (I_k - I_j) \omega_j \omega_k} \quad (8.13)$$

In Komponenten entspricht dies:

$$I_1 \dot{\omega}_1 = N_1 - (I_3 - I_2) \omega_2 \omega_3 \quad (8.14)$$

$$I_2 \dot{\omega}_2 = N_2 - (I_1 - I_3) \omega_1 \omega_3 \quad (8.15)$$

$$I_3 \dot{\omega}_3 = N_3 - (I_2 - I_1) \omega_1 \omega_2 \quad (8.16)$$

Die Eulerschen Bewegungsgleichungen sind im Allgemeinen schwer zu lösen. Insbesondere muss noch die Drehmatrix $R(t)$ bestimmt werden, damit aus der Differentialgleichung:

$$\dot{R} = -\vec{\omega}' \cdot \vec{l} \cdot R \quad (8.17)$$

oder

$$\dot{R}_{jk} = -\varepsilon_{ijm} \omega_i R_{mk} \quad (8.18)$$

Wir werden daher die Eulerschen Bewegungsgleichungen für einige wichtige Spezialfälle lösen sowie allgemeine Eigenschaften besprechen.

8.2 Kräftefreier Kreisel

Im kräftefreien Kreisel verschwindet das Drehmoment: $\vec{N}' = 0 \Rightarrow \vec{N} = 0$

Somit reduzieren sich die Eulerschen Bewegungsgleichungen auf¹:

$$I_1 \cdot \dot{\omega}_1 = -\frac{1}{2} \sum_{j,k} \varepsilon_{ijk} (I_k - I_j) \omega_j \omega_k \quad (8.19)$$

oder:

$$\dot{\omega}_1 + \frac{I_3 - I_2}{I_1} \omega_2 \omega_3 = 0 \quad (8.20)$$

$$\dot{\omega}_2 + \frac{I_1 - I_3}{I_2} \omega_1 \omega_3 = 0 \quad (8.21)$$

$$\dot{\omega}_3 + \frac{I_2 - I_1}{I_3} \omega_1 \omega_2 = 0 \quad (8.22)$$

Eine volle Lösung ist nur durch elliptische Funktionen möglich. Hier werden wir uns zunächst einige Informationen über die geometrische Darstellung mittels des Trägheitsellipsoides verschaffen und dann Spezialfälle lösen.

8.2.1 Drehimpuls im körperfesten System

Kräftefrei:

$$T' = \frac{1}{2} I_{ij} \omega_i \omega_j = \frac{1}{2} \sum_i I_i \omega_i^2 \quad (8.23)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_i \frac{L_i^2}{I_i} \quad (8.24)$$

Leite (8.20) nach t ab:

$$\sum_i \omega_i I_i \dot{\omega}_i + \frac{1}{2} \overbrace{\sum_{i,j,k} \varepsilon_{ijk} (I_k - I_j) \omega_j \omega_k \omega_i}^{=0} \quad (8.25)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \sum_i I_i \omega_i^2 \quad (8.26)$$

$$= \frac{d}{dt} T' = 0 \quad (8.27)$$

Die Gesamtenergie $E = T'$ ist erhalten und damit gilt:

$$E = \frac{1}{2} \left(\frac{L_1^2}{I_1} + \frac{L_2^2}{I_2} + \frac{L_3^2}{I_3} \right)$$

$$\leadsto \boxed{1 = \frac{L_1^2}{2EI_1} + \frac{L_2^2}{2EI_2} + \frac{L_3^2}{2EI_3}}$$

¹Achtung: Es handelt sich hier um **keine** Summe!

Bemerkung: \vec{L} liegt auf einem Ellipsoid mit den Halbachsen $\sqrt{2EJ_i}$.
Drehimpulserhaltung: $(\vec{L}')^2 = \text{const.}$

$$\vec{L}'^2 = (R\vec{L})^2 \quad (8.28)$$

$$= R_{ij}L_j R_{ik}L_k \quad (8.29)$$

$$= L_j R_{ji}^T R_{ik}L_k \quad (8.30)$$

$$= L_j^2 = \vec{L}^2 \quad (8.31)$$

Damit erhalten wir, dass \vec{L} auf einer Sphäre mit Radius $L = \|\vec{L}\|$ liegt.

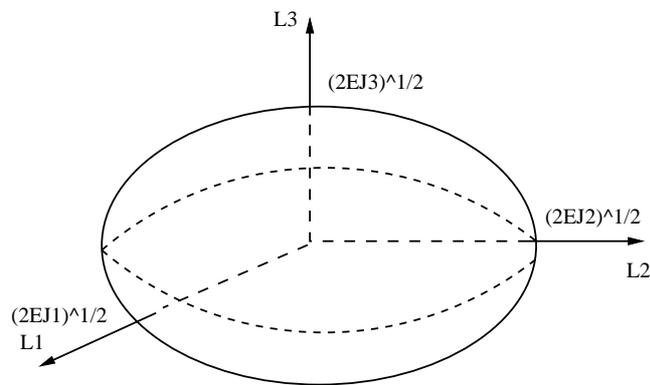


Abbildung 8.1: Binet-Ellipsoid und \vec{L} auf Sphäre

Wobei OBdA $I_1 > I_2 > I_3$ gelte.

Unterscheide folgende Fälle:

- (1) $L < \sqrt{2EI_3}$ nicht möglich
- (2) $L = \sqrt{2EI_3}$ liefert die Berührungspunkte $L = + - (0, 0, L)$ und eine Rotation mit $\vec{\omega} = \text{const.}$
- (3) $\sqrt{2EI_3} < L < \sqrt{2EI_2}$. Im kräftefreien Fall gilt: $\vec{L}' = \text{const.} \Rightarrow \vec{L} = R^{-1}\vec{L}'$:
Der Körper präzessiert also.
- (4) $L = \sqrt{2EI_2}$ mit Berührungspunkten $\vec{L} = + - (0, L, 0)$. ABBILDUNG
Keine stabile Drehachse!
- (5) $\sqrt{2EI_2} < L < \sqrt{2EI_1}$ siehe 3. Fall.
- (6) $L = \sqrt{2EI_1}$, $\vec{L} = + - (L, 0, 0)$

8.2.2 Bewegung des starren Körpers im raumfesten Inertialsystem

Poinsat-Konstruktion: Wie benutzen jetzt das Trägheitsellipsoid gegeben durch $F(\vec{\omega}) = 0$ mit $F(\vec{\omega}') = \frac{1}{2}I'_{ij}w'_i w'_j - E$. Der Drehimpuls ist der Normalenvektor zum Trägheitsellipsoid:

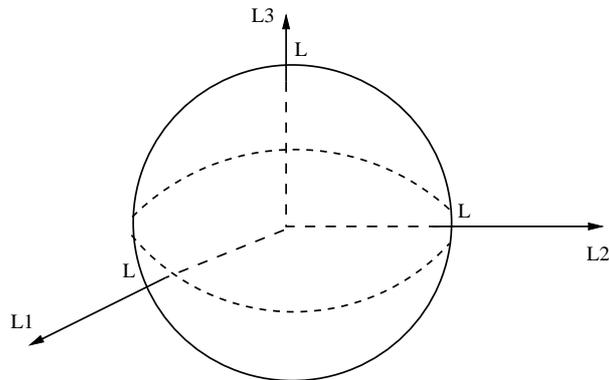


Abbildung 8.2: Fall 6

Normalenvektor $\vec{\nu}$:

$$\nu_i = \frac{\partial F}{\partial w'_i} = I'_{ij} \omega'_j = L'_j \quad (8.32)$$

Desweiteren ist \vec{L}' konstant: Außerde, gilt $T' = E$ konstant mit

$$T' = \frac{1}{2} I'_{ij} \omega'_i \omega'_j = \frac{1}{2} L'_j \omega'_j = E \quad (8.33)$$

und damit ist ($L' = \|\vec{L}'\|$):

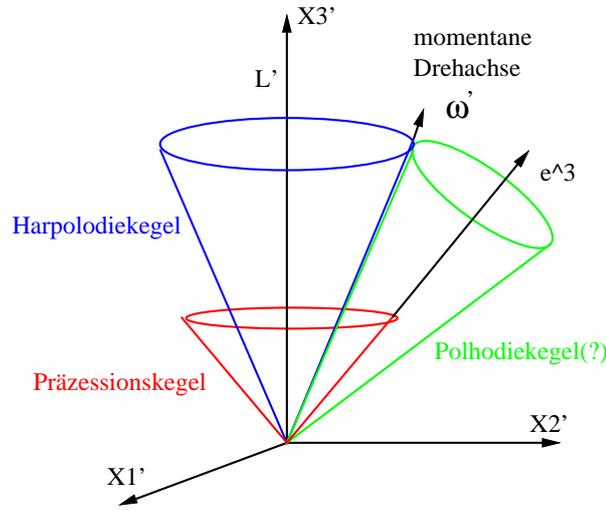
$$h = \frac{\vec{\omega}' \cdot \vec{L}'}{L'} = \frac{2E}{L'} = \text{const.} \quad (8.34)$$

mit ABBILDUNG

$\vec{x} \cdot \vec{L} = h$ ist Gleichung einer Ebene: ABBILDUNG

Der Vektor $\vec{\omega}'$ liegt auf dem Ellipsoid $F(\vec{\omega}') = 0$ mit dem Normalenvektor \vec{L}' : ABBILDUNG

Im raumfesten Inertialsystem ergibt sich:



Dies ist die **reguläre Präzession (Nutation)**.

8.2.3 Spezialfälle: (un)symmetrischer Kreisel

$$I_1 \neq I_2 \neq I_3$$

Sei $\omega_3 \gg \omega_1, \omega_2$. Es gilt dann:

$$\frac{\dot{\omega}_3}{\omega_3} = -\frac{(I_2 - I_1)\omega_1\omega_2}{I_3\omega_3} \sim 0 \quad (8.35)$$

Damit ist $\dot{\omega}_3 \ll \omega_3$ und wir approximieren $\omega_3 = \bar{\omega}$ mit $\bar{\omega}$ konstant. Dies führt zu linearen Gleichungen:

$$\dot{\omega}_1 = -\bar{\omega} \frac{(I_3 - I_2)}{I_1} \omega_2 \quad (8.36)$$

$$\dot{\omega}_2 = -\bar{\omega} \frac{(I_1 - I_3)}{I_2} \omega_1 \quad (8.37)$$

mit der Lösung:

$$\ddot{\omega}_1 = -\bar{\omega} \frac{I_3 - I_2}{I_1} \dot{\omega}_2 \quad (8.38)$$

$$= \bar{\omega}^2 \frac{(I_1 - I_3)(I_3 - I_2)}{I_1 I_2} \omega_1 \quad (8.39)$$

$$\ddot{\omega}_2 = \bar{\omega}^2 \frac{(I_2 - I_3)(I_3 - I_1)}{I_1 I_2} \omega_2 \quad (8.40)$$

$$\Rightarrow \omega_1(t) = a \sin(\omega t + \varphi) \quad (8.41)$$

$$\omega_2(t) = b \cos(\omega t + \varphi) \quad (8.42)$$

mit:

$$\omega = \bar{\omega} \sqrt{\frac{(I_3 - I_1)(I_3 - I_2)}{I_1 I_2}} \quad (8.43)$$

$$b = \sqrt{\frac{I_1(I_1 - I_3)}{I_2(I_2 - I_3)}} \cdot a \quad (8.44)$$

ω ist reell für $I_1, I_2 > I_3$ oder $I_1, I_2 < I_3$. Es findet also keine Rotation um die mittlere Hauptachse I_3 mit $I_1 < I_3 < I_2$ oder $I_2 < I_3 < I_1$ statt. Dies hatten wir schon geometrisch gesehen.

Die momentane Drehachse ist gegeben durch:

$$\frac{\vec{\omega}}{\|\vec{\omega}\|} \approx \left(\frac{\omega_1}{\bar{\omega}}, \frac{\omega_2}{\bar{\omega}}, 1 \right) \quad (8.45)$$

Beispiel: Erde: $I_1 = I_2 : a = b$, abgeflacht: $\frac{I_1 - I_3}{I_1} \sim 3.3 \cdot 10^{-3}$. Damit gilt:

$$\omega = \bar{\omega}_{\text{Erde}} 3.3 \cdot 10^{-3} \quad (8.46)$$

$\bar{\omega}_{\text{Erde}}$

$$= \frac{2\pi}{1 \text{ Tag}} = \frac{2\pi}{1 \text{ Tag}} \cdot 3.3 \cdot 10^{-3} \quad (8.47)$$

$$= \frac{2\pi}{T_{\text{Präzession}}} \quad (8.48)$$

$$\Rightarrow T_{\text{Präzession}} \sim 300 \text{ Tage} \quad (8.49)$$

Weitere Effekte: Deformierbarkeit der Erde.

8.3 Eulersche Winkel

Beim freien Kreisel verschwinden das Drehmoment \vec{N}' und damit auch \vec{N} . Im Allgemeinen ist jedoch $\vec{N}' \neq 0$, zum Beispiel beim Kreisel in einem Schwerfeld. Für die Bewegungsgleichungen benötigen wir auch die Rotationsmatrix $R(t)$. Wir suchen daher eine einfache Parametrisierung einer **allgemeinen Drehung**.

Gesucht: Drehe A nach A' :

$$\vec{x}' = R\vec{x} \quad (8.50)$$

$$\bar{R}^3(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (8.51)$$

$$\bar{R}^1(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (8.52)$$

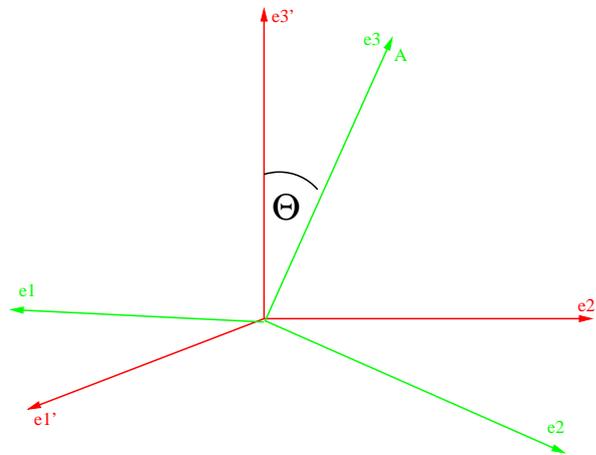


Abbildung 8.3: Allgemeine Drehung

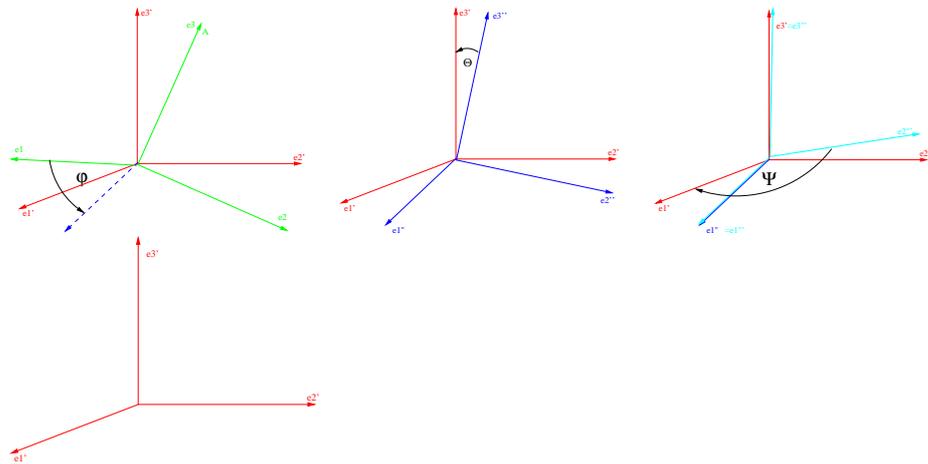


Abbildung 8.4: Verdeutlichung der Überlegungen hinter den Eulerschen Winkeln

$\bar{R}^3(\varphi)$:

$$\hat{e}_i'' = \bar{R}_{ij}^3(\varphi)\hat{e}_j \quad (8.53)$$

zum Beispiel:

$$\hat{e}_1'' = \cos(\varphi)\hat{e}_1 + \sin(\varphi)\hat{e}_2 \quad (8.54)$$

$R^1(\theta)$:

$$\hat{e}_k''' = \bar{R}_{ki}^1(\theta)\hat{e}_i'' \quad (8.55)$$

zum Beispiel:

$$\hat{e}'_3 = -\sin(\theta)\hat{e}''_2 + \cos(\theta)\hat{e}''_3 \quad (8.56)$$

$R^3(\psi)$:

$$\hat{e}'_l = \bar{R}_{lk}^3(\psi)\hat{e}''_k \quad (8.57)$$

zum Beispiel:

$$\hat{e}'_1 = \cos(\psi)\hat{e}''_1 + \sin(\psi)\hat{e}''_2 \quad (8.58)$$

und damit:

$$\hat{e}'_l = \bar{R}_{lk}^3(\psi)\bar{R}_{ki}^1(\theta)\bar{R}_{ij}(\varphi)\bar{e}_j \quad (8.59)$$

\bar{R} :

$$\begin{pmatrix} \cos(\psi)\cos(\varphi) - \sin(\psi)\cos(\theta)\sin(\varphi) & \cos(\psi)\sin(\varphi) + \sin(\psi)\cos(\theta)\cos(\varphi) & \sin(\psi)\sin(\theta) \\ -\sin(\varphi)\cos(\varphi) - \cos(\psi)\cos(\theta)\sin(\varphi) & -\sin(\psi)\sin(\varphi) + \cos(\psi)\cos(\theta)\cos(\varphi) & \cos(\psi)\sin(\theta) \\ \sin(\theta)\sin(\varphi) & -\sin(\theta)\cos(\varphi) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad (8.60)$$

φ, θ, ψ heißen **Eulersche Winkel**.

Beispiel:

$$\begin{aligned} \hat{e}'_3 &= \begin{pmatrix} \sin(\theta)\sin(\varphi) \\ -\sin(\theta)\cos(\varphi) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix} \\ &= \sin(\theta)\sin(\varphi)\hat{e}_1 - \sin(\theta)\cos(\varphi)\hat{e}_2 + \cos(\theta)\hat{e}_3 \end{aligned} \quad (8.61)$$

$\varphi = 0$:

$$\hat{e}'_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ \sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} \quad (8.62)$$

Hier sei A ein Inertialsystem und A' das körperfeste System.

Wir wollen nun $\vec{x}' = R\vec{x}$ bestimmen:

$$\begin{aligned}
\vec{x} &= x_i \hat{e}_i \\
\Rightarrow \vec{x}' &= x_i \hat{e}_i \\
&= x_i \bar{R}_{ij} \hat{e}_j
\end{aligned} \tag{8.63}$$

und:

$$\begin{aligned}
\vec{x}' \cdot \hat{e}_k &= \underbrace{x'_k}_{\text{Koordinate im ungestrichenen System}} \\
&= x_i \bar{R}_{ik}
\end{aligned} \tag{8.64}$$

Mit $\hat{e}_{ik} \vec{x}' = \hat{e}_k R \vec{x}$ folgt:

$$\begin{aligned}
\vec{x}'_k &= R_{ki} x_i \\
\Rightarrow R_{ki} &= \bar{R}_{ik}
\end{aligned} \tag{8.65}$$

Somit erhalten wir:

$$\boxed{R = R^3(\varphi) R^1(\theta) R^3(\psi)} \tag{8.66}$$

8.3.1 Zeitabhängige Drehung

$$\vec{x}' = R(t) \vec{x} \tag{8.67}$$

und damit:

$$\begin{aligned}
\dot{\vec{x}}' &= \dot{R}(t) \vec{x} = (\dot{R} R^t) \vec{x}' = -\vec{\omega}' \vec{l} \vec{x}' \\
&= \vec{\omega}' \times \vec{x}'
\end{aligned} \tag{8.68}$$

Die t -Ableitung von R ist dann:

$$\begin{aligned}
\dot{R} R^t &= R^3(\varphi) R^1(\theta) \dot{R}^3(\psi) R^{3t}(\psi) R^{1t}(\theta) R^{3t}(\varphi) \\
&\quad + R^3(\varphi) \dot{R}^1(\theta) \dot{R}^t(\theta) R^{3t}(\varphi) \\
&\quad + \dot{R}^3(\varphi) R^t(\varphi) \\
&= -[R^3(\varphi) R^1(\theta) l^3 R^{1t}(\theta) R^{3t}(\varphi) + R^3(\varphi) l^1 R^{3t}(\varphi) + l^3]
\end{aligned} \tag{8.69}$$

Mit: $[\omega_1(\theta) = \dot{\theta}, \omega_3(\varphi) = \dot{\varphi}, \omega_3(\psi) = \dot{\psi}]$. Weiterhin bezeichnet

- φ die Drehung um e^3 nach \hat{e}_3 .
- θ die Drehung um $R^3(\varphi) l^1 R^{3t}(\varphi)$ nach \hat{e}'_1 .

- ψ die Drehung um $R^3(\varphi)R^1(\theta)l^3R^{3t}(\theta)R^3(\varphi)$ nach \hat{e}'_3 .

Dann gilt:

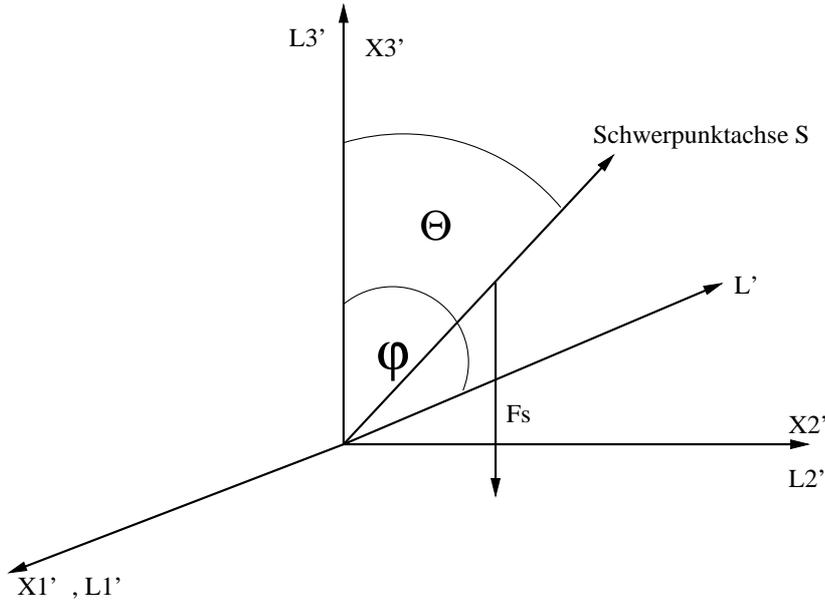
$$\vec{\omega}' = \dot{\theta}\hat{e}'_1 + \dot{\psi}\hat{e}'_3 + \dot{\varphi}\hat{e}_3$$

$$\underbrace{\quad}_{\text{im } A'\text{-System}} = \dot{\theta} \begin{pmatrix} \cos \psi \\ -\sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix} + \dot{\varphi} \begin{pmatrix} \sin \psi \sin \theta \\ \cos \psi \sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} + \dot{\psi} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (8.70)$$

Mit $\vec{\omega}' = \omega'_i \hat{e}'_i$ folgt:

$$\begin{aligned} \omega'_1 &= \dot{\theta} \cos \psi + \dot{\varphi} \sin \psi \sin \theta \\ \omega'_2 &= -\dot{\theta} \sin \psi + \dot{\varphi} \cos \psi \sin \theta \\ \omega'_3 &= \dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta \end{aligned} \quad (8.71)$$

8.4 Kreisel im Gravitationsfeld



Dabei ist \vec{N}' orthogonal zur $\hat{e}'_s - \vec{S}$ -Ebene, da $\sim \vec{x}' \times \ddot{\vec{x}}' = \vec{x}' \times \vec{F}'_s \frac{1}{m}$.

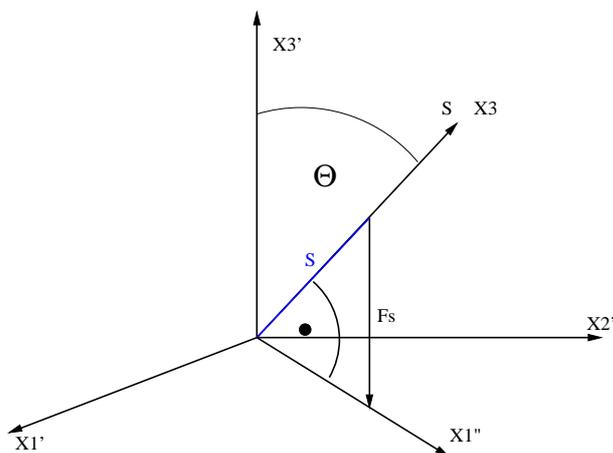
Näherung: $\vec{L}' \parallel \vec{S}$, die Präzession ist also klein. Damit gilt $\vec{L}' \perp \vec{N}'$ und $\dot{\vec{L}}' = \vec{N}'$. Die Spitze von \vec{L}' beschreibt einen Kreis um \hat{e}'_3 mit Radius $R = \|\vec{L}'\| \sin \varphi$ und der Geschwindigkeit $\|\dot{\vec{L}}'\| = v = \|\vec{N}'\|$.

Damit ergibt sich als Periode:

$$T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi \|\vec{L}'\| \sin \varphi}{\|\vec{N}'\|} \quad (8.72)$$

Beispiel: Erde mit \vec{N}' durch Sonne und Mond. Dabei ist $T = 26000$ Jahre.

Allgemein gilt:



$$\vec{N}' = -mgs\hat{e}_3 \times \hat{e}'_3$$

Die x_3 -Komponente des Drehmoments verschwindet also:

$$\vec{N}' \cdot \hat{e}_3 = 0$$

(8.73)

Die Eulersche Bewegungsgleichung für ω_3 ist also:

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_3 &= \frac{1}{I_3}(N_3 - (I_2 - I_1)\omega_1\omega_2) \\ &= -\frac{1}{I_3}(I_2 - I_1)\omega_1\omega_2 \end{aligned}$$

Da beim schweren symmetrischen Kreisel $I_2 = I_1$, ergibt sich:

$$\dot{\omega}_3 = 0$$

(8.74)

Die Eulerschen Winkel bedeuten:

- φ beschreibt eine Drehung mit Drehachse \hat{e}'_3 .
- θ beschreibt eine Drehung mit Drehachse \hat{e}''_1 .
- ψ beschreibt eine Drehung mit Drehachse \hat{e}_3 .

Damit erhalten wir:

$$\begin{aligned}\omega_1 &= \dot{\theta} \cos \psi + \dot{\varphi} \sin \psi \sin \theta \\ \omega_2 &= -\dot{\theta} \sin \psi + \dot{\varphi} \cos \psi \sin \theta \\ \omega_3 &= \dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta\end{aligned}\quad (8.75)$$

Unter Verwendung von $I_1 = I_2$ erhalten wir:

$$\begin{aligned}I_1 \omega_1^2 + I_2 \omega_2^2 &= I_1 (\omega_1^2 + \omega_2^2) \\ &= I_1 (\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta)\end{aligned}\quad (8.76)$$

Damit ergibt sich nun die Lagrangefunktion:

$$\begin{aligned}L &= \frac{1}{2} \sum_i I_i \omega_i^2 - mgs \cos \theta \\ \Rightarrow L &= \frac{1}{2} I_1 (\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{I_3}{2} (\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta)^2 - mgs \cos \theta\end{aligned}\quad (8.77)$$

Abkürzungen:

- $\varphi \sim$ Symmetrieachse des Systems: Die Drehachse \hat{e}'_3 ist parallel zu \vec{F}_g .
- $\psi \sim$ Symmetrieachse des Systems: Die Drehachse \hat{e}_3 ist Symmetrieachse des Kreisels, da $I_1 = I_2$.

$$\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \psi} = \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0. \quad \curvearrowright \text{ Herleitung von } L \text{ für } \varphi = \psi = 0.$$

Wir stellen also fest:

$$\boxed{\varphi, \psi \text{ sind zyklische Variable}}$$

Die Energie ist gegeben durch:

$$E = \frac{I_1}{2} (\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{I_3}{2} (\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta)^2 + mgs \cos \theta \quad (8.78)$$

Wir benutzen nun die Bewegungsgleichungen der zyklischen Variablen φ, ψ :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = 0 \quad (8.79)$$

für φ :

$$L'_3 = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \dot{\varphi} (I_1 \sin^2 \theta + I_3 \cos^2 \theta) + \dot{\psi} I_3 \cos \theta \quad (8.80)$$

für ψ :

$$L_3 = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = \dot{\varphi} I_3 \cos \theta + \dot{\psi} I_3 \quad (8.81)$$

$$\Rightarrow L'_3 = \dot{\varphi} I_1 \sin^2 \theta + L_3 \cos \theta \quad (8.82)$$

Wir lösen nun $\dot{\varphi} I_1 \sin^2 \theta$ auf:

$$\dot{\varphi} I_1 \sin^2 \theta = L'_3 - L_3 \cos \theta$$

oder:

$$\boxed{I_1 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta = \frac{1}{I_1 \sin^2 \theta} (L'_3 - L_3 \cos \theta)^2} \quad (8.83)$$

Damit folgt für die Gesamtenergie:

$$\boxed{E = \frac{I_1}{2} \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2I_1 \sin^2 \theta} (L'_3 - L_3 \cos \theta)^2 + \frac{L_3^2}{2I_3} + mgs \cos \theta} \quad (8.84)$$

mit $\dot{E} = 0$.

Oder:

$$E = \frac{I_1}{2} \dot{\theta}^2 + V_{\text{eff}}(\theta) \Rightarrow L_\theta = \frac{I_1}{2} \dot{\theta}^2 - V_{\text{eff}}(\theta) \quad (8.85)$$

mit:

$$V_{\text{eff}}(\theta) = \frac{1}{2I_1 \sin^2 \theta} (L'_3 - L_3 \cos \theta)^2 + \frac{L_3^2}{2I_3} + mgs \cos \theta \quad (8.86)$$

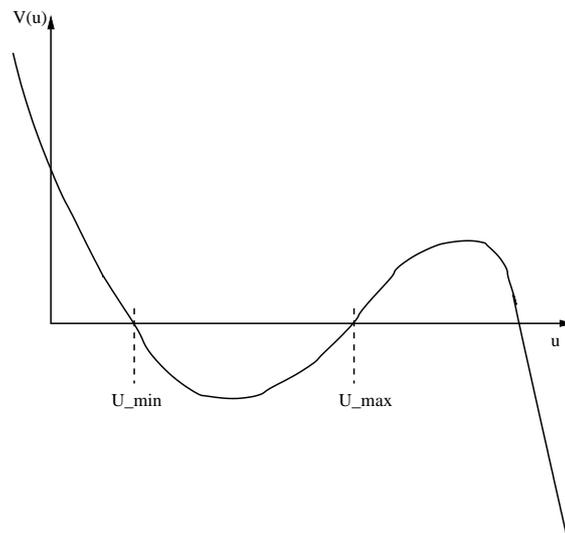
Führe neue Variable ein: $u = \cos \theta$, $\dot{u} = -\dot{\theta} \sin \theta$

$$\Rightarrow E = \frac{I_1}{2} \frac{\dot{u}^2}{1-u^2} + \frac{1}{2I_1(1-u^2)} (L'_3 - L_3 u)^2 + \frac{L_3^2}{2I_3} + mgsu \quad (8.87)$$

oder:

$$\dot{u}^2 + \frac{2}{I_1} \overbrace{\left[\frac{L'_3 - L_3 u}{2I_1} + \left(\frac{L_3^2}{2I_3} - E + mgsu \right) (1-u^2) \right]}{:=\bar{V}(u)} = 0 \quad (8.88)$$

Mit der Bedingung: $\bar{V}(u) \leq 0$.

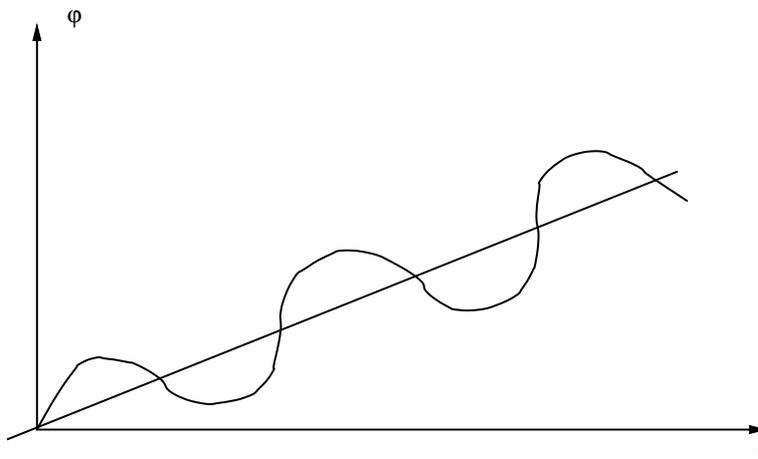


Es folgt: u oszilliert zwischen u_{\min} und u_{\max} . Also oszilliert θ zwischen $\theta_{\min} = \arccos u_{\min}$ und $\theta_{\max} = \arccos u_{\max}$.

Als Bewegungsgleichung für φ erhält man:

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} &= \frac{L'_3 - L_3 \cos \theta}{I_1 \sin^2 \theta} \\ &= \frac{L'_3 - L_3 u}{I_1 (1 - u^2)} \end{aligned} \quad (8.89)$$

Bemerkung: Falls $|\dot{\varphi}| < \infty$, so ist $1 - u^2 = 0$ nur für $\dot{u}^2 = 0$ und $L'_3 - L_3 u = 0$. Dann ist $\dot{\varphi} = \frac{L'_3}{2I_1}$.



Näherung für kleine Präzession: $\dot{\theta} = 0$: u ist konstant.

Bewegungsgleichung:

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \frac{\partial L_\theta}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L_\theta}{\partial \theta} &= 0 \\
 \Rightarrow \left. \frac{\partial V_{\text{eff}}}{\partial \theta} \right|_{\bar{\theta}} &= 0 \\
 \Rightarrow \frac{L_3}{I_1 \sin \theta} (L'_3 - L_3 \cos \theta) - \frac{\cos \theta}{I_1 \sin^3 \theta} (L'_3 - L_3 \cos \theta)^2 - mgs \sin \theta &= 0
 \end{aligned} \tag{8.90}$$

Benutze $\dot{\varphi} = \frac{(L'_3 - L_3 \cos \theta)}{I_1 \sin^2 \theta}$:

$$\begin{aligned}
 L_3 \sin \bar{\theta} \dot{\varphi} - I_1 \sin \bar{\theta} \cos \bar{\theta} \dot{\varphi}^2 - mgs \sin \bar{\theta} &= 0 \\
 \Rightarrow L_3 \dot{\varphi} - I_1 \cos \bar{\theta} \dot{\varphi}^2 - mgs &= 0
 \end{aligned} \tag{8.91}$$

Und falls $L_3 \dot{\varphi} \gg I_1 \cos \bar{\theta} \dot{\varphi}^2$, erhalten wir:

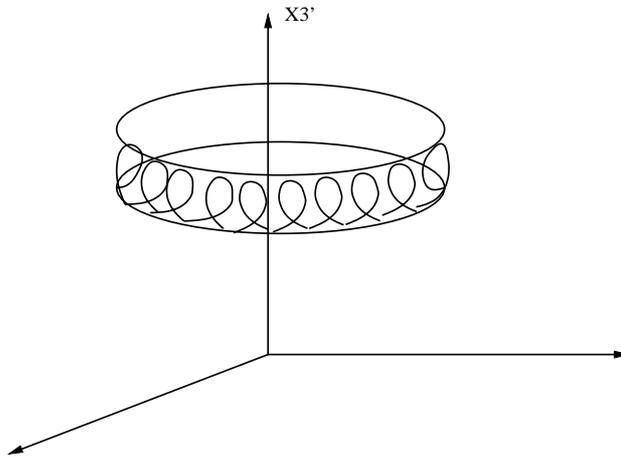
$$\boxed{\dot{\varphi} = \frac{mgs}{L_3}} \tag{8.92}$$

Der Kreisel präzessiert also mit der Kreisfrequenz $\dot{\varphi}$ um die x'_3 -Achse. Außerdem gilt:

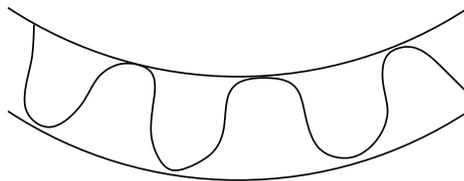
$$L_\theta = \frac{I_1}{2} \dot{\theta}^2 - \frac{1}{2} V''_{\text{eff}}(\bar{\theta})(\theta - \bar{\theta})^2 + O((\theta - \bar{\theta})^3) \tag{8.93}$$

und damit die reguläre Präzession:

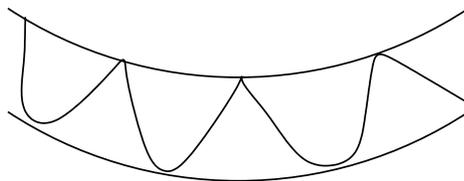
$$\dot{\theta} = -\frac{2}{I_1} V''_{\text{eff}}(\bar{\theta})(\theta - \bar{\theta}) \tag{8.94}$$



(ii)



(iii)



Kapitel 9

Hamiltonformalismus

Ziel des Hamiltonformalismus' ist eine Formulierung der klassischen Mechanik in Form von Differentialgleichungen 1. Ordnung. Die Formulierung hat Vorteile bei der direkten physikalischen Interpretation, und bei der Formulierung von Symmetrien. Sie liegt der Heisenbergschen Formulierung der Quantenmechanik zu Grunde, als auch der allgemeinen Formulierung der QFT (Phasenraumpfadintegrale)

Motivation: EL:

$$\underbrace{\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q}} = 0 \quad (9.1)$$

i.A. $\sim \ddot{q} \Rightarrow$ Differentialgl. 2. Ordnung

Wir wollen aber lieber Differentialgleichungen 1.Ordnung.

Beispiel:

$$L = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - V(q) \quad \text{mit} \quad \boxed{m\ddot{q} = -\frac{\partial L}{\partial q}} \quad (9.2)$$

Definiere:

$$m\dot{q} = p \quad (9.3)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{EL: } \dot{p} = \frac{\partial L}{\partial q} = -\frac{\partial V}{\partial q} \\ \text{mit } p = m\dot{q} \end{array} \right\} \text{Satz von Diff.gl. 1.Ordnung} \quad (9.4)$$

$$\text{oder } \dot{q} = \frac{p}{m} \quad \text{für } p, q \quad (9.5)$$

Sei

$$H(p, q) = \frac{p^2}{2m} + V(q) \quad (9.6)$$

und damit

$$\frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m} \stackrel{!}{=} \dot{q} \quad (9.7)$$

Damit ergibt sich:

$$\frac{\partial H}{\partial q} = \frac{\partial V}{\partial q} \stackrel{!}{=} -\dot{p} = -m\ddot{q} \quad (9.8)$$

Bemerkung: i.A. ist $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \neq m\dot{q}$

Beispiel: Kraft auf Teilchen mit Ladung q im elektromagnetischen Feld

$$L = \frac{1}{2}m\dot{\vec{x}}^2 - q \left(\varphi(\vec{x}) - \frac{1}{c}\vec{A}(\vec{x}) \cdot \dot{\vec{x}} \right) \quad (9.9)$$

mit

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = m\dot{x}_i + \frac{q}{c}\vec{A}(\vec{x})_i \quad (9.10)$$

9.1 Hamiltonsche Bewegungsgleichungen

Wir suchen Funktion $H(p, q)$ mit

$$\frac{\partial H}{\partial p} = \dot{q} \quad , \quad \frac{\partial H}{\partial q} = -\dot{p}, \quad \text{mit } p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \quad (9.11)$$

Ausgangspunkt ist die Lagrangefunktion L mit *kanonischem* Impuls

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \quad (9.12)$$

Wir wollen p als neue Variable (für \dot{q}) einführen, und $\frac{\partial H}{\partial q} = -\dot{p} = -\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$ erhalten:

Sei

$$H(p, q) = f(p, \dot{q}(p, q)) - L(q, \dot{q}(p, q)) \quad (9.13)$$

Wir verlangen

$$\frac{\partial H(p, q)}{\partial q} \stackrel{!}{=} -\frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial q} \quad (9.14)$$

$$\stackrel{(9.13)}{=} \frac{\partial f}{\partial \dot{q}} \frac{\partial \dot{q}}{\partial q} - \frac{\partial}{\partial q} \Big|_{\dot{q}} L - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{\partial \dot{q}}{\partial q} \quad (9.15)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{\partial f}{\partial \dot{q}} = p} \quad (9.16)$$

und damit

$$f(p, \dot{q}(p, q)) = p \cdot \dot{q} \quad (9.17)$$

$$\Rightarrow H(p, q) = p \cdot \dot{q} - L(q, \dot{q}) \quad (9.18)$$

mit

$$\frac{\partial H}{\partial p} = \dot{q} + p \cdot \frac{\partial \dot{q}(p, q)}{\partial p} - \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}}_{p} \frac{\partial \dot{q}(p, q)}{\partial p} \quad (9.19)$$

$$= \dot{q} \quad (9.20)$$

H nennt man Hamiltonfunktion. Sie ist die Legendretransformierte von L bezüglich \dot{q} . Im Allgemeinen gilt:

$$H(\vec{p}, \vec{q}; t) = \max_{\dot{\vec{q}}} \left\{ \vec{p} \cdot \dot{\vec{q}} - L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}; t) \right\} \quad (9.21)$$

siehe Präsenzübung

9.2 Legendretransformation

Sei $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4$

ABBILDUNG

Legendretransformation:

$$g(y) = \max_x (y \cdot x - f(x)) = \mathcal{L}(f) \quad (9.22)$$

ABBILDUNG

Eigenschaften:

- Maximum: $\left. \frac{\partial}{\partial x}(y \cdot x - f(x)) \right|_{x_{max}} = 0$
 $\Rightarrow \boxed{y = f'(x_{max}(y))}$ (9.23)

- Ableitung: $\boxed{\frac{\partial}{\partial y}g(y) = x_{max}}$

ABBILDUNG

$$y = 0 : \quad f'(x_{max}) = 0 \quad \curvearrowright \quad x_{max} = x_{min} \text{ für } y \rightarrow 0_+ \quad (9.24)$$

$$x_{max} = -x_{min} \text{ für } y \rightarrow 0_- \quad (9.25)$$

$$\Rightarrow \boxed{g'(0_{\pm}) = \pm x_{min}} \quad (9.26)$$

Legendretransformation von g:

$$\bar{f}(x) = \max_y (x \cdot y - g(y)) \quad (9.27)$$

mit $\boxed{x = g'(y_{max})}$

$$\boxed{\bar{f}'(x) = y_{max} = f'(x)}$$

wenn ableitbar!

(9.28)

ABBILDUNG
und damit
ABBILDUNG

- \bar{f} ist die konvexe Hülle von f
- Legendretransformationen sind *konvexe* Funktionen. Für konvexe Funktionen ist die Legendretransformation eine isomorphe Transformation mit $\mathcal{L}^2 = 1$

- Ableitbarkeit $\Leftrightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0$

Dann gilt

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 1 \quad (9.29)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} y \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial y} \quad (9.30)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} x = 1 \quad (9.31)$$

\dot{q}_{max} für

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \Big|_{\dot{q}_{max}} (\vec{p} \cdot \dot{\vec{q}} - L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}; t)) = 0 \quad (9.32)$$

$$= p_i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \Big|_{\dot{q}_{max}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}} \quad (9.33)$$

und

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i \quad (9.34)$$

Hamiltonsche Bewegungsgleichungen: (kanonische Bewegungsgl.)

$$\boxed{\frac{\partial H(\vec{p}, \vec{q}; t)}{\partial p_i} = \dot{q}_i, \quad \frac{\partial H(\vec{p}, \vec{q}; t)}{\partial q_i} = -\dot{p}_i}$$

EL-Gleichungen folgen mit $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$, und damit

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} = -\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad \text{mit} \quad \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} H = 0 \quad (9.35)$$

$$= \frac{\partial L}{\partial q_i} \quad \text{aus Definition} \quad (9.36)$$

Zeitabhängigkeit: $\boxed{\vec{p}, \vec{q} \text{ erfüllen Bewegungsgleichung}}$

$$\frac{d}{dt}H(\vec{p}, \vec{q}; t) = \frac{\partial H}{\partial p_i} \dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial H}{\partial t} \quad (9.37)$$

$$= \dot{q}_i p_i - p_i \dot{q}_i + \frac{\partial H}{\partial t} \quad (9.38)$$

$$= \frac{\partial H}{\partial t} \quad (9.39)$$

Keine explizite Zeitabhängigkeit: $\dot{H} = 0$

Beispiel:

$$L(q, \dot{q}; t) = \frac{1}{2} m \dot{q}^2 - V(q) \quad (9.40)$$

$$H(p, q; t) = \max_{\dot{q}} (p \cdot \dot{q} - L(q, \dot{q}; t)) \quad (9.41)$$

$$\Rightarrow p = \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right|_{q_{max}} = m \dot{q}_{max} \Rightarrow \dot{q}_{max}(p, q) = \frac{p}{m} \quad (9.42)$$

$$\Rightarrow H(p, q; t) = p \cdot \frac{p}{m} - \frac{1}{2} m \frac{p^2}{m^2} + V(q) \quad (9.43)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{p^2}{m} + V(q) \quad (9.44)$$

H ist die Energie: $\dot{H} = 0$ Energieerhaltung $\boxed{\text{für dieses System}}$

Allgemeine Bedeutung von H:

$$H = p_i \dot{q}_i - L = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L \quad (9.45)$$

mit

$$L = \overbrace{\frac{1}{2} m_{ij}(\vec{q}; t) \dot{q}_i \dot{q}_j}^T - \dot{q}_i U_i(\vec{q}; t) - V_i(\vec{q}; t) \quad (9.46)$$

$$p_i = m_{ij} \dot{q}_j - U_i(\vec{q}; t) \Rightarrow \dot{q}_j = m_{ji}^{-1} (p_i + U_i) \quad (9.47)$$

Es folgt

$$H = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L = \overbrace{\frac{1}{2} m_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j}^T + \overbrace{V(\vec{q}; t)}^V \quad (9.48)$$

ist Gesamtenergie, mit \vec{p} :

$$H(\vec{p}, \vec{q}; t) = \frac{1}{2} m_{ij}^{-1} (p_i + U_i)(p_j + U_j) + V(\vec{q}; t) \quad (9.49)$$

Wir haben

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} = - \frac{\partial L}{\partial t} \stackrel{\text{keine exp. Zeitabh.}}{=} 0 \quad (9.50)$$

Beispiel: Lorentzkraft, $q_i = x_i$

$$V_{ges} = q \cdot \varphi - \frac{q}{c} \vec{A} \cdot \dot{\vec{x}} \quad (9.51)$$

mit

$$U_i = -\frac{q}{c} A_i(\vec{x}; t) \quad \text{und} \quad V = q \cdot \varphi(\vec{x}; t) \quad (9.52)$$

und Kraft

$$F_i = -\frac{\overbrace{\partial V}^{(1)}}{\partial x_i} - \frac{\overbrace{\partial U_j}^{(2)}}{\partial x_i} \dot{x}_j + \frac{\overbrace{dU_i}^{(3)}}{dt} \quad (9.53)$$

$$= q \left(\underbrace{E_i}_{\text{aus (1)(3, } \frac{\partial A}{\partial t})} + \frac{1}{c} \left(\underbrace{\dot{\vec{x}}}_{\text{aus (2)}} \times \underbrace{\vec{B}}_{\text{aus (3)}} \right)_i \right) \quad (9.54)$$

mit

$$E_i = -\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} - \frac{1}{c} \frac{\partial A_i}{\partial x} \quad (9.55)$$

$$B_i = \varepsilon_{ilm} \frac{\partial A_m}{\partial x_l} \quad (9.56)$$

Sei nun $\dot{\varphi} = \dot{\vec{A}} = 0$:

$$\vec{F} = q \left(\vec{E}(\varphi) + \frac{1}{c} (\dot{\vec{x}} \times B(\vec{u})) \right) = q\vec{E} + \vec{F}_L \quad (9.57)$$

Die Hamiltonfunktion ist $H \stackrel{(\cdot)}{=} \frac{1}{2} m \dot{\vec{x}}^2 + q \cdot \varphi$ mit $\frac{dH}{dt} = 0$.
 \vec{F}_L verrichtet keine Arbeit:

$$\dot{\vec{x}} \cdot \vec{F}_L = \frac{1}{2} \dot{\vec{x}} (\dot{\vec{x}} \times \vec{B}) = 0 \quad (9.58)$$

Explizit:

$$\frac{dH}{dt} = \underbrace{\vec{F} \cdot \vec{x} = q \cdot \vec{E} \cdot \dot{\vec{x}}}_{(\cdot)} + q \underbrace{\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}}_{-E_i} \dot{x}_i = 0 \quad (9.59)$$

Hamiltonsches Prinzip:

$$S[\vec{p}, \vec{q}] = \int_{t_0}^{t_1} dt L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}(\vec{p}, \vec{q}; t); t) \quad (9.60)$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} dt [\vec{p} \cdot \dot{\vec{q}}(\vec{p}, \vec{q}; t) - H(\vec{p}, \vec{q}; t)] \quad (9.61)$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} dt [-\dot{\vec{p}} \cdot \vec{q} - H(\vec{p}, \vec{q}; t)] + \vec{p}\vec{q} \Big|_{t_0}^{t_1} \quad (9.62)$$

Minimum: $p_i \rightarrow p_i + \varepsilon \delta p_i$; $q_i \rightarrow q_i + \varepsilon \delta q_i$
 mit $\frac{d}{d\varepsilon} S[\vec{p}, \vec{q}] = 0$

Es folgt:

δp_i beliebig:

$$\left(\frac{\partial}{\partial p_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{p}_i} \right) [-\dot{\vec{p}} \cdot \vec{q} - H(\vec{p}, \vec{q}; t)] = 0 \quad (9.63)$$

$$\Rightarrow \boxed{\dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} = 0} \quad (9.64)$$

δq_i beliebig:

$$\left(\frac{\partial}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \right) [-\dot{\vec{p}} \cdot \vec{q} - H(\vec{p}, \vec{q}; t)] = 0 \quad (9.65)$$

$$\Rightarrow \boxed{-\dot{p}_i - \frac{\partial H}{\partial q_i} = 0} \quad (9.66)$$

Beispiel: Bewegung im Zentralpotential $V(r)$

$$x_1 = r \cdot \cos \varphi \cdot \sin \theta \quad (9.67)$$

$$x_2 = r \cdot \sin \varphi \cdot \sin \theta \quad (9.68)$$

$$x_3 = r \cdot \cos \theta \quad (9.69)$$

und

$$\vec{x} = r \cdot \hat{e}_r \quad \text{mit} \quad \hat{e}_r = \begin{pmatrix} \cos \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi \sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} \quad (9.70)$$

$$\dot{\vec{x}} = \dot{r} \cdot \hat{e}_r + r \cdot \dot{\hat{e}}_r \quad \text{mit} \quad \dot{\hat{e}}_r = \underbrace{\dot{\varphi} \sin \theta \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}}_{\hat{e}_\varphi} + \underbrace{\dot{\theta} \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \theta \\ \sin \varphi \cos \theta \\ -\sin \theta \end{pmatrix}}_{\hat{e}_\theta} \quad (9.71)$$

$$\Rightarrow \dot{\vec{x}}^2 = \dot{r}^2 + r^2(\dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) \quad (9.72)$$

$$\Rightarrow L = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2(\dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2)) - V(r) \quad (9.73)$$

Impulse:

$$p_r = m\dot{r} \quad (9.74)$$

$$p_\varphi = mr^2 \dot{\varphi} \sin^2 \theta \quad (9.75)$$

$$p_\theta = mr^2 \dot{\theta} \quad (9.76)$$

$$\Rightarrow H = \frac{1}{2m} \left(p_r^2 + \frac{p_\varphi^2}{r^2 \sin^2 \theta} + \frac{p_\theta^2}{r^2} \right) + V(r) \quad (9.77)$$

Kanonische Bewegungsgleichungen:

$$\varphi : \dot{p}_\varphi = 0 \quad , \quad \dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{mr^2 \sin^2 \theta} \quad (9.78)$$

$$\theta : \dot{p}_\theta = \frac{p_\varphi^2}{r^2 \sin^2 \theta} \cot \theta \quad , \quad \dot{\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2} \quad (9.79)$$

$p_\varphi = L_{x_3}$: Drehimpuls in x_3 -Richtung ist erhalten: $\dot{L}_{x_3} = 0!$

Bewegung in x_1 - x_2 -Ebene:

$$\theta = \frac{\pi}{2} \quad , \quad \dot{\theta} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \dot{p}_\theta = 0 \quad , \quad \dot{\theta} = 0 \quad (9.80)$$

$$H = \frac{1}{2m} \left(p_r^2 + \frac{L_{x_3}^2}{r^2} \right) + V(r) \quad (9.81)$$

$$\text{mit } \dot{\varphi} = \frac{L_{x_3}}{mr^2} \quad (9.82)$$

$$\boxed{\frac{1}{2}r^2\dot{\varphi} = \frac{L_{x_3}}{2m}}$$

(Flächensatz, 2. Keplersches Gesetz)

$$r : \dot{p}_r = \frac{L_{x_3}^2}{2mr^3} - V'(r) \quad , \quad \dot{r} = \frac{1}{m}p_r \quad (9.83)$$

$$\Rightarrow \boxed{m\ddot{r} = \frac{L_{x_3}^2}{2mr^3} - V'(r)}$$

9.3 Poissonklammern

Wir hatten die Zeitabhängigkeit von H mit den kanonischen Bewegungen in Verbindung gebracht. Dies gilt allgemein:

Zeitabhängigkeit einer allgemeinen Funktion $A(p, q; t)$

$$\frac{dA(p, q, t)}{dt} = \frac{\partial A}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial A}{\partial p} \dot{p} + \frac{\partial A}{\partial t} \quad (9.84)$$

$$= \frac{\partial A}{\partial q} \frac{\partial H}{\partial p} - \frac{\partial A}{\partial p} \frac{\partial H}{\partial q} + \frac{\partial A}{\partial t} \quad (9.85)$$

$$= \{A, H\} + \frac{\partial A}{\partial t} \quad (9.86)$$

mit Poissonklammern $\{.,.\}$:

$$\{A, B\} = \frac{\partial A}{\partial q} \frac{\partial B}{\partial p} - \frac{\partial A}{\partial p} \frac{\partial B}{\partial q} \quad (9.87)$$

Insbesondere gilt für die Kanonischen Bewegungsgleichungen:

$$\dot{q} = \{q, H\} \text{ mit } \{q, H\} = \frac{\partial q}{\partial q} \frac{\partial H}{\partial p} - \frac{\partial q}{\partial p} \frac{\partial H}{\partial q} = \frac{\partial H}{\partial p} \quad (9.88)$$

$$\dot{p} = \{p, H\} \text{ mit } \{p, H\} = \frac{\partial p}{\partial q} \frac{\partial H}{\partial p} - \frac{\partial p}{\partial p} \frac{\partial H}{\partial q} = -\frac{\partial H}{\partial q} \quad (9.89)$$

Eigenschaften der Poissonklammern:

(1) Es gilt für jede Funktion $A(p, q; t)$:

$$\frac{d}{dt} = \{., H\} + \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{p,q} \quad (9.90)$$

(2) $\{., B\}$ erfüllt die Leibnizregel. Das folgt schon aus 9.90, da $\frac{d}{dt}$ und $\frac{\partial}{\partial t} \Big|_{p,q}$ der Leibnizregel gehorchen. Es gilt

$$\{AC, B\} = C \{A, B\} + A \{C, B\} \quad (9.91)$$

Beweis:

$$\{AC, B\} = \frac{\partial AC}{\partial q} \frac{\partial B}{\partial p} - \frac{\partial AC}{\partial p} \frac{\partial B}{\partial q} \quad (9.92)$$

$$= C \left(\frac{\partial A}{\partial q} \frac{\partial B}{\partial p} - \frac{\partial A}{\partial p} \frac{\partial B}{\partial q} \right) + A \left(\frac{\partial C}{\partial q} \frac{\partial B}{\partial p} - \frac{\partial C}{\partial p} \frac{\partial B}{\partial q} \right) \quad (9.93)$$

(3) $\{., B\}$ ist linear: $\{A, \alpha\} = 0$ für α konstant in p, q

$$\{\alpha A + \gamma C, B\} = \alpha \{A, B\} + \gamma \{C, B\} \quad (9.94)$$

(4) Antisymmetrie: $\{A, B\} = -\{B, A\}$

(5) Es folgt \cdot, B ist ein linearer Operator, der die Jacobiidentität erfüllt:

$$\{\{A, B\}, C\} + \{\{C, A\}, B\} + \{\{B, C\}, A\} = 0 \quad (9.95)$$

Beweis:

$$\{\{A, B\}, C\} = \{\{A, C\}, B\} + \{A, \{B, C\}\} \quad (9.96)$$

$$= -\{\{C, A\}, B\} - \{\{B, C\}, A\} \quad (9.97)$$

Kommentare:

- (2), (3) und (4) bzw. (5) definieren eine Liealgebra
- Die Poissonklammer definiert eine Ableitung

$$D_B = \{\cdot, B\}, \quad \frac{d}{dt} = D_H + \frac{\partial}{\partial t} \quad (9.98)$$

$$= \frac{\partial B}{\partial q} \frac{\partial}{\partial p} - \frac{\partial B}{\partial p} \frac{\partial}{\partial q} \quad (9.99)$$

$$\alpha) D_B A C = (D_B A) C + A D_B C$$

$$\beta) D_B(\alpha A + \gamma C) = \alpha D_B A + \gamma D_B C$$

$$\gamma) D_B B = 0$$

$\delta)$

$$D_A D_B - D_B D_A = -D_{\{A, B\}} \quad (9.100)$$

$$[D_A, D_B] = -D_{\{A, B\}} \quad \text{Liealgebra} \quad (9.101)$$

Beweis:

$$(D_A D_B - D_B D_A) C = \{\{C, B\}, A\} - \{\{C, A\}, B\} \quad (9.102)$$

$$= -\{\{B, C\}, A\} - \{\{C, A\}, B\} \quad (9.103)$$

$$= \{\{A, B\}, C\} = -D_{\{A, B\}} C \quad (9.104)$$

Beispiel:

$$B = p: \quad D_p = \frac{\partial}{\partial q} \quad (9.105)$$

$$A = q: \quad D_q = -\frac{\partial}{\partial p} \quad (9.106)$$

$$[D_q, D_p] = -\underbrace{D_{\{A, B\}}}_1 = 0 \quad (9.107)$$

D_p erzeugt Translationen in q :

$$e^{q_0 D_p} f(q) = e^{q_0 \frac{\partial}{\partial q}} f(q) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (q_0 \frac{\partial}{\partial q})^n f(q) \quad (9.108)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} q_0^n f^{(n)}(q) = f(q + q_0) \quad (9.109)$$

D_q erzeugt Translationen in p :

$$e^{-p_0 D_q} g(p) = g(p + p_0) \quad (9.110)$$

Obige Resultate lassen sich leicht auf ein beliebiges System verallgemeinern, mit Koordinaten q_i , $i = 1, \dots, N$:

$$\{A(\vec{p}, \vec{q}; t), B(\vec{p}, \vec{q}; t)\} = \sum_i \left(\frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial B}{\partial p_i} - \frac{\partial B}{\partial q_i} \frac{\partial A}{\partial p_i} \right) \quad (9.111)$$

$$(9.112)$$

und

$$\frac{dA}{dt} = \{A, H\} + \frac{\partial A}{\partial t} \quad (9.113)$$

$$\dot{q}_i = \{q_i, H\} \quad (9.114)$$

$$\dot{p}_i = \{p_i, H\} \quad (9.115)$$

mit den Eigenschaften 1 - 4, 5 und 9.3 und 9.3.

Es gilt:

$$\{p_i, p_j\} = \{q_i, q_j\} = 0 \quad (9.116)$$

$$\{q_i, p_j\} = \delta_{ij} \quad (9.117)$$

$$= \frac{\partial q_i}{\partial q_l} \frac{\partial p_j}{\partial p_l} - \frac{\partial p_j}{\partial q_l} \frac{\partial q_i}{\partial p_l} = \delta_{il} \delta_{jl} = \delta_{ij} \quad (9.118)$$

Beispiel: Drehimpuls $L_i = \varepsilon_{ijk} x_j p_k$

Poissonklammer: $D_{x_n} = -\frac{\partial}{\partial p_n}$, $D_{p_k} = \frac{\partial}{\partial x_k}$

$$\{L_i, L_j\} = \varepsilon_{ilm} \varepsilon_{jnk} \{x_l p_m, x_n p_k\} \quad (9.119)$$

$$= \varepsilon_{ilm} \varepsilon_{jnk} (\{x_l p_m, x_n\} p_k + \{x_l p_m, p_k\} x_n) \quad (9.120)$$

$$= \varepsilon_{ilm} \varepsilon_{jnk} (p_k D_{x_n} x_l p_m + x_n D_{p_k} x_l p_m) \quad (9.121)$$

$$= \varepsilon_{ilm} \varepsilon_{jnk} (-x_l p_k \delta_{nm} + x_n p_m \delta_{kl}) \quad (9.122)$$

$$= x_l p_k \varepsilon_{ilm} \varepsilon_{jkm} - x_n p_m \varepsilon_{imk} \varepsilon_{jnk} \quad (9.123)$$

$$= \vec{x} \vec{p} \delta_{ij} - x_j p_i - \vec{x} \vec{p} \delta_{ij} + x_i p_j \quad (9.124)$$

$$= \varepsilon_{ijk} L_k \quad (9.125)$$

also

$$\{L_i, L_j\} = \varepsilon_{ijk} L_k \quad (9.126)$$

Das erinnert an die Liealgebra der $SO(3)$, Algebra der Erzeugenden (engl. generators):

$$l^i l^j - l^j l^i \rightarrow [l^i, l^j] = -\varepsilon_{ijk} l^k \quad (9.127)$$

mit

$$l^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad l^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad l^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad l_{jk}^i = \varepsilon_{ijk} \quad (9.128)$$

Tatsächlich ist 9.126 (mit $L_i \rightarrow +L_i$) eine Darstellung von 9.127: Das heißt, $\{., L_i\}$ erzeugt Drehungen.

Betrachte

$$D_{L_j} x_i = \{x_i, L_j\} = \varepsilon_{jnm} \{x_i, x_n p_m\} \quad (9.129)$$

$$= \varepsilon_{jnm} x_n D_{p_m} x_i \quad (9.130)$$

$$= \varepsilon_{jni} x_n \quad (9.131)$$

$$= \varepsilon_{ijn} x_n \quad (9.132)$$

Vergleich mit der Wirkung von l^i auf Einheitsvektoren \hat{e}_i :

$$l^j \hat{e}_i = \hat{e}_k \varepsilon_{jkn} (\hat{e}_i)_n = \varepsilon_{jki} \hat{e}_k \quad (9.133)$$

$$= \varepsilon_{ijk} \hat{e}_k \quad (9.134)$$

Bemerkung: D_{L_i} erzeugt Drehungen auf den Vektoren \vec{x}, \vec{p} aber das gilt nicht

für einen beliebigen Vektor, z.B.: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$: $D_{L_i} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$. Damit erzeugt D_{L_i}

Drehungen im Phasenraum.

Frage: Können wir L_i, L_j als unabhängige Variablen wählen?

9.4 Satz von Lionville

Sei $H(p, q; t)$ die Hamiltonfunktion eines eindimensionalen Systems:

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \quad \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \quad (9.135)$$

ABBILDUNG

Die Vektoren $\vec{x}_\Gamma = (q, p)$ liegen in Γ , dem Phasenraum, zur Erinnerung:

ABBILDUNGEN (aus Kapitel 2)

Wie bekommen wir obiges Bild:

$$\text{Sei } \vec{\omega}_\Gamma = \dot{\vec{x}}_\Gamma = (\dot{q}, \dot{p}) = \left(\frac{\partial H}{\partial p}, -\frac{\partial H}{\partial q} \right) = \left(\frac{p}{m}, -V'(q) \right).$$

$\vec{\omega}_\Gamma$ ist ein Vektorfeld im Phasenraum Γ .

ABBILDUNG

Inkompressible Strömung:

$$\vec{\nabla}_\Gamma \vec{\omega}_\Gamma = \frac{\partial^2 H}{\partial q \partial p} - \frac{\partial^2 H}{\partial p \partial q} = 0 \quad (9.136)$$

Inkompressible Strömungen: keine Volumenänderung

Warum interessant: Sei die Anfangsbedingung nur mit einer gewissen Genauigkeit gegeben: ABBILDUNG $x_\Gamma(t_0) \in V_\Gamma(t_0)$

ABBILDUNG

$$dV_\Gamma = \int_{S_\Gamma} d\vec{A}_\gamma(\vec{\omega}_\Gamma dt) \quad (9.137)$$

$$\Rightarrow \dot{V}_\Gamma = \int_{V_\Gamma} dV_\Gamma(\vec{\nabla}_\gamma \vec{\omega}_\Gamma) = 0 \quad (\text{Lionvillscher Satz}) \quad (9.138)$$

mit $\nabla_{\Gamma_i} = \frac{\partial}{\partial x_{\Gamma_i}}$

Allgemein: q_i, p_i mit $i = 1, \dots, N$

$$\vec{x}_{\Gamma} = (q, p) \quad \rightarrow \quad \vec{x}_{\Gamma} = (\vec{q}, \vec{p}) \quad (9.139)$$

$$\vec{\omega}_{\Gamma} = (\dot{q}, \dot{p}) \quad \rightarrow \quad \vec{\omega}_{\Gamma} = \left(\dot{\vec{q}}, \dot{\vec{p}} \right) \quad (9.140)$$

$$\vec{\nabla}_{\Gamma_i} = \frac{\partial}{\partial x_{\Gamma_i}} \quad (9.141)$$

$$dV_{\Gamma} = dqdp \quad \rightarrow \quad dV_{\Gamma} = dq_1 \dots dq_N dp_1 \dots dp_N \quad (9.142)$$

Kapitel 10

Kanonische Transformationen

Wir haben gesehen, dass die Phasenraumformulierung einige Vereinfachungen und interessante Ergebnisse ermöglicht hat.

Außerdem treten, wie immer, (weitere) Vereinfachungen durch geeignete Variablenwahl statt, z. B. Kugelkoordinaten bei Zentralpotential. Wir möchten daher allgemeine Koordinatentransformationen formulieren, die die kanonischen Strukturen erhalten.

Motivation / Beispiel: „Ist es möglich, die L_i (Drehimpulse) gleichzeitig als kanonische Impulse zu wählen?“

Betrachte allgemeine Koordinatentransformation in Systemen ohne explizite Zeitabhängigkeit. $L = L(\vec{q}, \dot{\vec{q}})$ mit $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$.

Koordinatentransformation:

$$\begin{aligned} q_i &\rightarrow Q_i \\ L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}) &\rightarrow \bar{L}(\vec{Q}, \dot{\vec{Q}}) = L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}) \end{aligned}$$

Es folgt sofort, dass

$$\begin{aligned} H(\vec{p}, \vec{q}) &= \bar{H}(\vec{P}, \vec{Q}) = T + V \\ \text{mit } H &= \vec{p} \cdot \dot{\vec{q}} - L, p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \text{ und } \bar{H} = \vec{P} \cdot \dot{\vec{Q}} - \bar{L}, P_i = \frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{Q}_i} \end{aligned}$$

da wir gezeigt hatten, dass in obigen Systemen die Hamiltonfunktion $H = T + V$ ist, für allgemeine generalisierte Koordinaten.

Damit gilt:

$$\boxed{\frac{\partial H}{\partial Q_i} = \frac{\partial \bar{H}}{\partial Q_i} = -\dot{P}_i, \quad \frac{\partial H}{\partial P_i} = \frac{\partial \bar{H}}{\partial P_i} = \dot{Q}_i} \quad (10.1)$$

Was passiert mit den Poissonklammern:

$$\begin{aligned}
\{A(\vec{p}, \vec{q}), B(\vec{p}, \vec{q})\}_{\vec{p}, \vec{q}} &:= \frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial B}{\partial p_i} - \frac{\partial B}{\partial q_i} \frac{\partial A}{\partial p_i} \\
&= \left[\frac{\partial A}{\partial Q_l} \frac{\partial Q_l}{\partial q_i} + \frac{\partial A}{\partial P_l} \frac{\partial P_l}{\partial q_i} \right] \cdot \left[\frac{\partial B}{\partial Q_m} \frac{\partial Q_m}{\partial p_i} + \frac{\partial B}{\partial P_m} \frac{\partial P_m}{\partial p_i} \right] \\
&\quad - \left[\frac{\partial B}{\partial Q_m} \frac{\partial Q_m}{\partial q_i} + \frac{\partial B}{\partial P_m} \frac{\partial P_m}{\partial q_i} \right] \cdot \left[\frac{\partial A}{\partial Q_l} \frac{\partial Q_l}{\partial p_i} + \frac{\partial A}{\partial P_l} \frac{\partial P_l}{\partial p_i} \right] \\
&= \left[\frac{\partial A}{\partial Q_l} \frac{\partial B}{\partial Q_m} \{Q_l, Q_m\}_{\vec{p}, \vec{q}} + \frac{\partial A}{\partial P_l} \frac{\partial B}{\partial P_m} \{P_l, P_m\}_{\vec{p}, \vec{q}} \right] \\
&\quad + \left[\frac{\partial A}{\partial Q_l} \frac{\partial B}{\partial P_m} \{Q_l, P_m\}_{\vec{p}, \vec{q}} + \frac{\partial A}{\partial P_l} \frac{\partial B}{\partial Q_m} \{P_l, Q_m\}_{\vec{p}, \vec{q}} \right]
\end{aligned}$$

Wir benötigen die fundamentalen Poissonklammern $\{Q, Q\}$, $\{P, P\}$, $\{Q, P\}$
Dazu berechnen wir

$$\begin{aligned}
\dot{P}_l &= \{P_l, H\}_{\vec{p}, \vec{q}} \\
&= \frac{\partial P_l}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial P_l}{\partial p_i} \\
&= \frac{\partial P_l}{\partial q_i} \left(\frac{\partial H}{\partial Q_m} \frac{\partial Q_m}{\partial p_i} + \frac{\partial H}{\partial P_m} \frac{\partial P_m}{\partial p_i} \right) \\
&\quad - \frac{\partial P_l}{\partial p_i} \left(\frac{\partial H}{\partial Q_m} \frac{\partial Q_m}{\partial q_i} + \frac{\partial H}{\partial P_m} \frac{\partial P_m}{\partial q_i} \right) \\
&= - \frac{\partial H}{\partial Q_m} \{Q_m, P_l\}_{\vec{p}, \vec{q}} + \frac{\partial H}{\partial P_m} \{P_m, P_l\}_{\vec{p}, \vec{q}}
\end{aligned}$$

Mit (10.1) folgt nun

$$\dot{P}_l = - \frac{\partial H}{\partial Q_l} = - \frac{\partial H}{\partial Q_m} \{Q_m, P_l\}_{\vec{p}, \vec{q}} + \frac{\partial H}{\partial P_m} \{P_m, P_l\}_{\vec{p}, \vec{q}}$$

Vergleicht man die auf beiden Seiten der Gleichung vorhandenen partiellen Ableitungen und ihre Indices, so erhält man die fundamentalen Poissonklammern (analoge Rechnung für \dot{Q}_l):

$$\boxed{
\begin{aligned}
\{Q_m, P_l\}_{\vec{p}, \vec{q}} &= \delta_{ml} \\
\{P_m, P_l\}_{\vec{p}, \vec{q}} &= 0 \\
\{Q_m, Q_l\}_{\vec{p}, \vec{q}} &= 0
\end{aligned}
}$$

Für allgemeine A und B erhält man somit:

$$\boxed{\{A, B\}_{\vec{p}, \vec{q}} = \{A, B\}_{\vec{P}, \vec{Q}}}$$

Diese wichtige Eigenschaft beantwortet die Eingangsfrage:

- (1) $\{L_i, L_j\}_{\vec{x}, \vec{p}} = \varepsilon_{ijk} L_k \neq 0$
- (2) Annahme: $L_i =: P_i$ kanonische Impulse zu $\theta_i = Q_i$.
Es folgt $\{L_i, L_j\} = \{L_i, L_j\}_{\vec{p}, \vec{Q}} = 0$.

Da (1) und (2) im Widerspruch zueinander stehen, können also L_i und L_j ($i \neq j$) nicht gleichzeitig als kanonische Impulse gewählt werden; es gibt keine generalisierten Koordinaten θ_i, θ_j !

10.1 Kanonische Transformationen, Definition

Eine **Punkttransformation** ist definiert durch

$$\vec{q} \rightarrow \vec{Q}(\vec{q}; t) \quad \text{mit} \quad \det \frac{\partial Q_i}{\partial q_j} \neq 0$$

$$\text{z.B. } \vec{x} \rightarrow (r, \theta, \varphi)$$

$$L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}; t) \rightarrow \bar{L}(\vec{Q}, \dot{\vec{Q}}; t) = L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}; t) \left[-\frac{dF}{dt} \right]$$

$$\text{mit } S[\vec{q}] \rightarrow \bar{S}[\vec{q}] = S[\vec{Q}]$$

$$\text{Beachte: } \frac{\partial \bar{Q}_i}{\partial \dot{q}_j} = 0, \text{ keine Abhängigkeit von } \dot{q}_j$$

Es gilt

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0 \quad , \quad \frac{\partial \bar{L}}{\partial Q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{Q}_i} = 0$$

Forminvarianz der Euler-Lagrange-Gleichungen

In der **Phasenraumformulierung** haben wir mehr Möglichkeiten: Eine kanonische Transformation ist definiert durch

$$\vec{q}, \vec{p} \rightarrow \vec{Q}(\vec{p}, \vec{q}; t), \vec{P}(\vec{p}, \vec{q}; t)$$

$$H(\vec{p}, \vec{q}; t) \rightarrow \bar{H}(\vec{p}, \vec{q}; t)$$

$$\text{mit } \frac{\partial H}{\partial q_i} = -\dot{p}_i, \quad \frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i \rightarrow \frac{\partial \bar{H}}{\partial Q_i} = -\dot{P}_i, \quad \frac{\partial \bar{H}}{\partial P_i} = \dot{Q}_i$$

Forderung der Forminvarianz der kanonischen Bewegungsgleichungen

Weiterhin gilt das **Wirkungsprinzip**:

$$\frac{d}{d\varepsilon} S[\vec{p}, \vec{q}] = 0 \rightarrow \frac{d}{d\varepsilon} \bar{S}[\vec{P}, \vec{Q}] = 0$$

$$\text{mit } S[\vec{p}, \vec{q}] = \int_{t_0}^{t_1} dt (\vec{p} \cdot \dot{\vec{q}} - H) \rightarrow \bar{S}[\vec{P}, \vec{Q}] = \int_{t_0}^{t_1} dt (\vec{P} \cdot \dot{\vec{Q}} - \bar{H})$$

$$\vec{p} \rightarrow \vec{p} + \varepsilon \delta \vec{p} \quad \text{und} \quad \vec{P} \rightarrow \vec{P} + \varepsilon \delta \vec{P}$$

$$\vec{q} \rightarrow \vec{q} + \varepsilon \delta \vec{q} \quad \text{und} \quad \vec{Q} \rightarrow \vec{Q} + \varepsilon \delta \vec{Q}$$

Obiges gilt für

$$\boxed{(\vec{p} \cdot \dot{\vec{q}} - H) - (\vec{P} \cdot \dot{\vec{Q}} - \bar{H}) = \frac{d}{dt} F(\vec{p}, \vec{P}, \vec{q}, \vec{Q}; t)} \quad (10.2)$$

$$\text{differenziell: } \boxed{\vec{p} \cdot d\vec{q} - \vec{P} \cdot d\vec{Q} - (H - \bar{H}) dt = dF(\vec{p}, \vec{P}, \vec{q}, \vec{Q}; t)} \quad (10.3)$$

Aus (10.3) folgt

$$\boxed{\left(p_i - \frac{\partial F}{\partial q_i} \right) dq_i - \left(P_i + \frac{\partial F}{\partial Q_i} \right) dQ_i - \frac{\partial F}{\partial p_i} dp_i - \frac{\partial F}{\partial P_i} dP_i - \left(H - \bar{H} + \frac{\partial F}{\partial t} \right) dt = 0} \quad (10.4)$$

$$(1) F = F_1(\vec{q}, \vec{Q}; t) :$$

$$dF_1 = \frac{\partial F_1}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial F_1}{\partial Q_i} dQ_i + \frac{\partial F_1}{\partial t} dt$$

$$\text{oder } \dot{F}_1 = \frac{\partial F_1}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial F_1}{\partial Q_i} \dot{Q}_i + \frac{\partial F_1}{\partial t}$$

Einsetzen in (10.4) oder (10.2) liefert:

$$\boxed{p_i = \frac{\partial F_1}{\partial q_i}, \quad P_i = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_i}, \quad \bar{H} = H + \frac{\partial F_1}{\partial t}}$$

$$(2) F = F_2(\vec{P}, \vec{q}; t) - \vec{P} \cdot \vec{Q} :$$

$$\left(P_i + \frac{\partial F}{\partial Q_i} \right) dQ_i = \left(P_i - \frac{\partial \vec{P} \cdot \vec{Q}}{\partial Q_i} \right) dQ_i = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i}, \quad Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i}, \quad \bar{H} = H + \frac{\partial F_2}{\partial t}}$$

$$(3) F = F_3(\vec{p}, \vec{Q}; t) + \vec{p} \cdot \vec{q} :$$

$$\Rightarrow \boxed{P_i = -\frac{\partial F_3}{\partial Q_i}, \quad q_i = -\frac{\partial F_3}{\partial p_i}, \quad \bar{H} = H + \frac{\partial F_3}{\partial t}}$$

$$(4) F = F_4(\vec{p}, \vec{P}; t) + (\vec{p} \cdot \vec{q} - \vec{P} \cdot \vec{Q}) :$$

$$\Rightarrow \boxed{q_i = -\frac{\partial F_4}{\partial p_i}, \quad Q_i = \frac{\partial F_4}{\partial P_i}, \quad \bar{H} = H + \frac{\partial F_4}{\partial t}}$$

$$(5) F = F_5(\vec{p}, \vec{q}; t) :$$

$$\Rightarrow dF = \frac{\partial F_5}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial F_5}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial F_5}{\partial t} dt$$

$$\text{Außerdem } d\vec{Q} = \frac{\partial \vec{Q}}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial \vec{Q}}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial \vec{Q}}{\partial t} dt$$

$$\Rightarrow \boxed{p_i - P_j \frac{\partial Q_j}{\partial q_i} = \frac{\partial F_5}{\partial q_i}, \quad -P_j \frac{\partial Q_j}{\partial p_i} = \frac{\partial F_5}{\partial p_i}, \quad \bar{H} = H + P_i \frac{\partial Q_i}{\partial t} + \frac{\partial F_5}{\partial t}}$$

$$(6) F = F_6(\vec{P}, \vec{Q}; t) :$$

$$\Rightarrow dF = \frac{\partial F_6}{\partial P_i} dP_i + \frac{\partial F_6}{\partial Q_i} dQ_i + \frac{\partial F_6}{\partial t} dt$$

$$\text{Außerdem } d\vec{q} = \frac{\partial \vec{q}}{\partial P_i} dP_i + \frac{\partial \vec{q}}{\partial Q_i} dQ_i + \frac{\partial \vec{q}}{\partial t} dt$$

$$\Rightarrow \boxed{P_i - p_j \frac{\partial q_j}{\partial Q_i} = -\frac{\partial F_6}{\partial Q_i}, \quad p_j \frac{\partial q_j}{\partial P_i} = \frac{\partial F_6}{\partial P_i}, \quad \bar{H} = H - p_i \frac{\partial q_i}{\partial t} + \frac{\partial F_6}{\partial t}}$$

Punkttransformationen:

$$Q_i = Q_i \vec{q}; t = f(\vec{q}; t)$$

$$\Rightarrow Q_i = \frac{\partial F_2(\vec{P}, \vec{q}; t)}{\partial P_i} = f_i(\vec{q}; t)$$

Es folgt $F_2(\vec{P}, \vec{q}; t) = f_i(\vec{q}; t) \cdot P_i$ (Integrationskonstante 0)

$$\text{und } p_i = \frac{\partial f_j}{\partial q_i} \cdot P_j$$

$$\bar{H} = H + \frac{\partial f_i}{\partial t} \cdot P_i$$

$$\text{Eingangsbeispiel: } \frac{\partial Q_i}{\partial t} = 0 \Rightarrow \bar{H} = H$$

10.2 Infinitesimale kanonische Transformationen

Wir hatten an $D_{x_i}, D_{p_i}, D_{L_i}$ gesehen, dass Poissonklammern Transformationen (D_{x_i} Translation in p_i, D_{p_i} Translation in x_i und D_{L_i} Rotation um Achse \hat{e}_i) erzeugen:

Infinitesimale Transformationen:

$$(1 + \varepsilon_i D_{p_i}) f(\vec{x}) = f(\vec{x} + \vec{\varepsilon}) + O(\varepsilon^2)$$

$$f(\vec{x}) + \varepsilon_i \{f(\vec{x}), p_i\} = f(\vec{x}) + \varepsilon_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

Analog infinitesimale kanonische Transformation:

Nehme (keine explizite Zeitabhängigkeit)

$$F = F_2(\vec{P}, \vec{q}) - \vec{P} \cdot \vec{Q} \quad \text{mit} \quad \frac{\partial F_2}{\partial q_i} = p_i, \quad \frac{\partial F_2}{\partial P_i} = Q_i \quad \text{mit} \quad Q_i = q_i + O(\varepsilon), \quad P_i = p_i + O(\varepsilon)$$

Sei nun $F_2(\vec{P}, \vec{q}) = \vec{q} \cdot \vec{P} + \varepsilon f_2(\vec{P}, \vec{q})$.

und damit $(f_2(\vec{P}, \vec{q}) = f_2(\vec{p}, \vec{q}) + O(\varepsilon))$

$$p_i = P_i + \varepsilon \frac{\partial f_2}{\partial q_i} \Rightarrow P_i = p_i - \varepsilon \frac{\partial f_2}{\partial q_i}$$

$$Q_i = q_i + \varepsilon \frac{\partial f_2}{\partial P_i} = q_i + \varepsilon \frac{\partial f_2}{\partial p_i} + O(\varepsilon^2)$$

d.h.:

$$\boxed{\begin{aligned} P_i &= p_i + \varepsilon \{p_i, f_2\} \\ Q_i &= q_i + \varepsilon \{q_i, f_2\} \end{aligned}} \quad (10.5)$$

oder allgemein

$$\boxed{A(\vec{P}, \vec{Q}) = A(\vec{p}, \vec{q}) + \varepsilon \{A, f_2\}} \quad (10.6)$$

Sei nun $f_2(\vec{p}, \vec{q}) = H(\vec{p}, \vec{q})$ und $\varepsilon = dt$ Zeitentwicklung:

$$A(\vec{p} + dt \cdot \dot{\vec{p}}, \vec{q} + dt \cdot \dot{\vec{q}}) = A(\vec{p}, \vec{q}) + dt \{A, H\}$$

Noethertheorem:

Wähle $A(\vec{P}, \vec{Q}; t) = H(\vec{P}, \vec{Q}; t)$ und $f_2 = f_2(\vec{p}, \vec{q})$ ← keine expl. t

$$H(\vec{P}, \vec{Q}; t) = H(\vec{p}, \vec{q}; t) + \varepsilon \{H, f_2\} \quad (10.7)$$

Wenn $H(\vec{P}, \vec{Q}; t) = H(\vec{p}, \vec{q}; t)$, dann ist f_2 eine Erhaltungsgröße!

Beweis: Gilt $H(\vec{P}, \vec{Q}; t) = H(\vec{p}, \vec{q}; t)$, so folgt aus 10.7 (Beachte $\frac{\partial f_2}{\partial t} = 0$)

$$\frac{df_2}{dt} = \{H, f_2\} = 0$$

Beispiel: Rotationsinvarianz: $\vec{q} = \vec{x}$, $\vec{p} = \vec{p}_x$

$$\begin{aligned} f_2(\vec{p}, \vec{x}) &= \vec{\varphi} \cdot \vec{L} = \varphi_i L_i \\ \Rightarrow P_l &= p_l + \varepsilon \{p, L_i\} \varphi_i \\ &= p_l + \varepsilon \varphi_i \varepsilon_{ijk} p_k \{p_l, x_j\} \\ &= p_l + \varepsilon \varphi_i \varepsilon_{ilk} p_k \\ &= p_l + \varepsilon \varepsilon_{lik} \varphi_i p_k \\ &= (\vec{p} + \vec{\varphi} \times \vec{p})_l \end{aligned}$$

$$\text{analog } \vec{X} = \vec{x} + \vec{\varphi} \times \vec{x}$$

Es folgt für

- $H = \frac{p^2}{2m} + V(|\vec{x}|) \Rightarrow \dot{L}_i = \{L_i, H\} = 0 \Rightarrow L_i \quad \forall i$ erhalten
- $H = \frac{p^2}{2m} + V(x_1^2 + x_2^2) \Rightarrow L_3$ erhalten, da $\{L_3, H\} = 0$,
aber $\{L_1, H\} \neq 0$, $\{L_2, H\} \neq 0$

10.3 Integrable Systeme

Sei G eine Erhaltungsgröße. Finden wir eine kanonische Transformation, so dass $P = G$ ist, dann gilt

$$\dot{P} = -\frac{\partial H}{\partial Q_G} = 0 \Rightarrow Q_G \text{ zyklisch}$$

\Rightarrow Einfache Bewegungsgleichungen **Beispiel**

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(|\vec{x}|)$$

- (1) $\{L_3, H\} = 0 \Rightarrow P_1 = L_3$ Erhaltungsgröße
Da $\{L_i, L_j\} \neq 0$, müssen andere kanonische Impulse gewählt werden.
- (2) $\{\vec{L}^2, L_i\} = 2L_j \{L_j, L_i\} = 2\varepsilon_{jik} L_j L_k = 0$
 $P_2 = \vec{L}^2$ Erhaltungsgröße, wegen $\{\vec{L}^2, H\} = 2\vec{L} \cdot \{L, H\} = 0$

$$(3) \{H, H\} = 0 \Rightarrow P_3 = H$$

Allgemein: $H(\vec{p}, \vec{q}; t)$ mit q_i ($i = 1, \dots, N$), d.h. $2N$ Variablen und Erhaltungsgrößen G_1, \dots, G_K mit

$$\boxed{\{G_i, G_j\} = 0 \quad \forall i, j} \quad (10.8)$$

Wähle $P_1 = G_1, \dots, P_K = G_K$ und damit $\frac{\partial H}{\partial Q_i} = 0 \quad \forall i = 1, \dots, K$, d.h. Q_1, \dots, Q_K zyklisch. Wir haben somit das Problem auf ein $2(N-K)$ -dimensionales Problem reduziert:

$$H(\vec{P}, \vec{Q}; t) = H(P_1, \dots, P_K, P_{K+1}, \dots, P_N, Q_{K+1}, \dots, Q_N; t)$$

Die Poissonklammer (10.8) wird benötigt, damit $\{P_i, P_j\} = 0 \quad \forall i, j = 1, \dots, K$ gilt!

Integrables System: $\boxed{K = N}$

Beispiele:

- (1) 1-dimensionale Hamiltonfunktion $H(q, p)$ mit $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$
 $P = H = E$
- (2) 3-dim. H mit $V = V(\|\vec{x}\|)$
 $P_1 = H, \quad P_2 = L_3, \quad P_3 = \vec{L}^2, \quad P_{3+i} = P_i$
- (3) harmonischer Oszillator \rightarrow Übungen

10.3.1 Konstruktion kanonischer Transformationen:

(0) Sei $G(\vec{p}, \vec{q})$ Erhaltungsgröße und $P_1 = G(\vec{p}, \vec{q})$.

(1) Auflösen nach p_1 :

$$p_1 = p_1(P_1, p_2, \dots, p_N, \vec{q})$$

(2) Erzeugende F_2 : $p_1 = \frac{\partial F_2(\vec{P}, \vec{q})}{\partial q_1}$

$$\Rightarrow F_2(\vec{P}, \vec{q}) = \int_{q_{10}}^{q_1} dq'_1 p_1(\vec{P}, q'_1, q_2, \dots, q_N)$$

(3) $Q_1 = \frac{\partial F_2}{\partial P_1}, \quad \vec{Q} = (Q_1, q_2, \dots, q_N)$

(4) $\bar{H}(\vec{P}, \vec{Q}) = H(\vec{p}, \vec{q})$ mit $\dot{P}_1 = 0$

Bemerkung:

(3) vor (2):

$$\begin{aligned} Q_1 &= \frac{\partial F_2}{\partial P_1} \rightarrow \frac{\partial Q_1}{\partial q_1} = \frac{\partial^2 F_2}{\partial P_1 \partial q_1} \\ &= \frac{\partial}{\partial P_1} \frac{\partial F_2}{\partial q_1} = \frac{\partial p_1}{\partial P_1} \\ \Rightarrow Q &= \int \frac{\partial p_1}{\partial P_1} dq_1 \end{aligned}$$

- (5) Wiederholung für weitere Erhaltungsgrößen.
oder:

(2)' $F_2(\vec{P}, \vec{q}) = \int_{\vec{q}_0}^{\vec{q}} d\vec{q}' \cdot \vec{p}(\vec{q}', \vec{P})$ und damit $p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i}$
zu zeigen: Integrabilität: $\frac{\partial^2 F_2}{\partial q_i \partial q_j} - \frac{\partial^2 F_2}{\partial q_j \partial q_i} = 0$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial p_i}{\partial q_j} - \frac{\partial p_j}{\partial q_i} = 0} \quad (10.9)$$

Beweis: $\left(\frac{\partial P}{\partial q}\right)_{ij} = \frac{\partial P_i}{\partial q_j}$

•

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_i}{\partial q_j} &= \frac{\partial}{\partial q_j} \Big|_{\vec{p}} p_i - \frac{\partial p_i}{\partial P_l} \frac{\partial P_l(\vec{p}, \vec{q})}{\partial q_j} \\ &= - \left[\left(\frac{\partial p}{\partial P} \right) \left(\frac{\partial P}{\partial q} \right) \right]_{ij} = A_{ij} \end{aligned}$$

A symmetrisch \Rightarrow (10.9)

•

$$A = \left(\frac{\partial P}{\partial p} \right)^{-1} \frac{\partial P}{\partial q}$$

- Poissonklammer $\{P_i, P_j\} = 0$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial P}{\partial q} \right) \left(\frac{\partial P}{\partial p} \right)^T &= \left(\frac{\partial P}{\partial p} \right) \left(\frac{\partial P}{\partial q} \right)^T \\ \Rightarrow \left(\frac{\partial P}{\partial p} \right)^{-1} &= \left(\frac{\partial P}{\partial q} \right)^T \left(\frac{\partial P}{\partial p} \right)^{T-1} \left(\frac{\partial P}{\partial q} \right)^{-1} \\ \Rightarrow A &= \left[\left(\frac{\partial P}{\partial q} \right)^T \left(\frac{\partial P}{\partial p} \right)^{T-1} \right] \left[\left(\frac{\partial P}{\partial q} \right)^{-1} \left(\frac{\partial P}{\partial q} \right) \right] = A^T \end{aligned}$$

Beispiel: Zweikörperproblem: $V = -\gamma/r$

$$H = \frac{1}{2m} p_r^2 + \frac{\vec{L}^2}{2mr^2} - \frac{\gamma}{r} + \frac{\vec{p}_S^2}{2M}$$

mit $L_i = \varepsilon_{ijk} x_j p_k$, $p_k = m \dot{x}_k$

$$p_r = m \dot{r}, \quad r = \|\vec{x}\|$$

$$\vec{p}_S = M \cdot \dot{\vec{x}}_S$$

Wir haben 6 Erhaltungsgrößen: $\{P_i, H\} = 0$

$$P_1 = H, \quad P_2 = \vec{L}^2, \quad P_3 = L_3, \quad P_{3+i} = P_{Si}$$

$$\text{Wähle } \vec{p}_S = 0, \quad L_3 = l_3, \quad \vec{L}^2 = l^2, \quad H = E$$

$$\boxed{\text{Sei } P_1 = p_r, \quad Q_1 = r}$$

$$p_r = \sqrt{2m(E - V_{eff}(r))}, \quad V_{eff}(r) = -\frac{\gamma}{r} + \frac{l^2}{2mr^2}$$

$$F_2 = \int_{r_0}^r dr' \sqrt{2m(E - V_{eff}(r'))}$$

$$Q_1 = \frac{\partial F_2}{\partial P_1} = \int_{r_0}^r dr' \frac{m}{\sqrt{2m(E - V_{eff}(r'))}}$$

$$\text{oder } \frac{\partial Q_1}{\partial q_1} = \frac{\partial^2 F_2}{\partial q_1 \partial P_1} = \frac{\partial p_1}{\partial E} = \frac{m}{\sqrt{2m(E - V_{eff}(r'))}}$$

$$\dot{Q}_1 = 1 = \frac{\partial H}{\partial H} \Rightarrow Q_1 = t - t_0$$

$$\text{und } t - t_0 = \int_{r_0}^r dr' \frac{m}{\sqrt{2m(E - V_{eff}(r'))}}$$

Integration gibt Lösung

Nicht integrable Systeme: z.B. Doppelpendel

ABBILDUNG 1 Erhaltungsgröße

10.4 Hamilton-Jacobi Theorie

Kanonische Transformationen sind Koordinatentransformationen auf dem Phasenraum, die die kanonischen Bewegungsgleichungen forminvariant lassen. Besonders einfache Koordinaten mit $\vec{P} = \vec{Q} = 0$. Das wird erreicht durch $\bar{H} = 0$ (oder konst.)

$$\bar{H} = H + \frac{\partial F_2}{\partial t} = 0, \quad F_2(\vec{P}, \vec{q}; t) \quad (\Leftarrow \text{ i.A. am besten geeignet})$$

$$\text{mit } \vec{p} = \vec{\nabla}_q F_2, \quad \vec{\nabla}_{q_i} = \frac{\partial}{\partial q_i}$$

Hamilton-Jacobi-Gleichung:

$$\boxed{H(\vec{q}, \vec{\nabla}_q F_2; t) + \frac{\partial F_2}{\partial t} = 0} \quad (10.10)$$

Gesucht ist F_2 mit (10.10).

(10.10) ist eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung für $F_2(q_1, \dots, q_N; t)$ mit $N + 1$ Variablen

Ansatz:

$$F_2 = S(q_1, \dots, q_N; t, \alpha_1, \dots, \alpha_N) + \alpha_{N+1}$$

S: Prinzipal o. Wirkungsfkt.

α_{N+1} fällt aus der Differentialgleichung heraus, da sie nur von $\frac{\partial F_2}{\partial q_i}$ und $\frac{\partial F_2}{\partial t}$

abhängt.

Wir wählen $P_i = \alpha_i$, $i = 1, \dots, N$

möglich, da $\dot{P}_i = 0$, alternativ $Q_i = \alpha_i$ wegen $\dot{Q}_i = 0$

Außerdem: $p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i}$ und $Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i}$, Q_i konst. $\Rightarrow Q_i = \beta_i = \frac{\partial S}{\partial \alpha_i}(\vec{q}, \vec{\alpha}; t)$

$$\boxed{\vec{q}(\vec{\alpha}, \vec{\beta}; t)} \quad \text{zu Anfangsbed. } (\vec{\alpha}, \vec{\beta})$$

Das Koordinatensystem \vec{P}, \vec{Q} des Phasenraums ist „körperfest“. Die dynamischen Bewegungsgleichungen sind in der kanonischen Transformation $\vec{q}(\vec{\alpha}, \vec{\beta}; t)$ und $\vec{p}(\vec{\alpha}, \vec{\beta}; t)$ enthalten. Wirkungsfkt.:

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial S}{\partial t} = \vec{p}\vec{\dot{q}} - H = L \Rightarrow S = \int_{t_0}^t dt' L \quad \text{Wirkung}$$

Beispiel:

$$H = p^2/2m, \quad p = \frac{\partial F_2}{\partial q}$$

$$H(q, \frac{\partial F_2}{\partial q}; t) + \frac{\partial F_2}{\partial t} = \frac{1}{2m} \left(\frac{\partial F_2}{\partial q} \right)^2 + \frac{\partial F_2}{\partial t} = 0$$

Separationsansatz: α_1, α_2

$$F_2(q; t) = W(q) + f(t)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2m} \left(\frac{\partial W}{\partial q} \right)^2 + \frac{\partial f}{\partial t} = 0$$

$$\left. \begin{aligned} \Rightarrow \frac{\partial W}{\partial q} &= \sqrt{2m\alpha_1} \\ \frac{\partial f}{\partial t} &= -\alpha_1 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} W(q) &= \sqrt{2m\alpha_1}q + \alpha_2 \\ f(t) &= -\alpha_1 t \end{aligned}$$

Außerdem:

$$\frac{\partial F_2}{\partial \alpha_1} = \frac{\partial S}{\partial \alpha_1} = \beta_1 = Q, \quad \alpha_1 = E$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{m}{2\alpha_1}}q - t = \beta_1 \rightarrow q = \sqrt{\frac{2\alpha_1}{m}}(t + \beta_1) = vt + q_0 \quad \text{mit} \quad v = \sqrt{\frac{2E}{m}}, \quad q_0 = v\beta_1$$

Kapitel 11

Kontinuumsmechanik

Beispiel: Schwingende Seite, Membran (wichtig für Feldtheorie, wie z.B. Elektrodynamik, Hydrodynamik und QFT)

ABBILDUNG

11.1 kleine Schwingungen

Hammonischer Oszillator:

$$L = \frac{m}{2}\dot{q}^2 - \frac{\kappa}{2}q^2, \quad H = \frac{m}{2}\dot{q}^2 + \frac{\kappa}{2}q^2 = E \quad (11.1)$$

$$F_2 = \int_{q_0}^q dq' \sqrt{2m(E - \frac{\kappa}{2}q'^2)} \quad (11.2)$$

mit Lösung

$$q(t) = \sqrt{\frac{2E}{m\omega}} \sin(\omega t + \varphi_0) \quad (11.3)$$

$$\text{mit } \omega = \sqrt{\frac{\kappa}{m}} \quad (11.4)$$

Allgemeine Lagrangefunktion: $g(q) > 0 \forall q$

$$L = \frac{1}{2}g(q)\dot{q}^2 - V(q) \quad (11.5)$$

Ruhelage: $V'(q_0) = 0$, Sei $q = q_0 + \varepsilon\eta$ (Stabil: $V''(q_0) > 0$)

$$\Rightarrow L = -V(q_0) + \underbrace{\varepsilon^2 \left[\frac{1}{2}g(q_0)\dot{\eta}^2 - \frac{1}{2}V''(q_0)\eta^2 \right]}_{L_\eta} + O(\varepsilon^3) \quad (11.6)$$

$$\varepsilon\eta \rightarrow q : L_\eta = \frac{1}{2}g(q_0)\dot{\eta}^2 - \frac{1}{2}V''(q_0)\eta^2 \quad (11.7)$$

harmonischer Oszillator mit:

$$\left. \begin{array}{l} m = g(q_0) \\ \kappa = V''(q_0) \end{array} \right\} \omega = \sqrt{\frac{V''(q_0)}{g(q_0)}} \quad (11.8)$$

wobei q : Auslenkung um Ruhelage q_0

Mehrere q_i , $i = 1, \dots, N$: $g(q)$ hat nur positive Eigenwerte

$$L = \frac{1}{2} g_{ij}(q) \dot{q}_i \dot{q}_j - V(\vec{q}) \quad (11.9)$$

Ruhelage: $\vec{\nabla}_q V(q_0) = 0$, $(\vec{\nabla} V)_i = \frac{\partial V}{\partial q_i}$

stabil: $\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j}$ positive Eigenwerte

Sei $\vec{q} = \vec{q}_0 + \varepsilon \vec{\eta}$

$$\Rightarrow L = -V(q_0) + \varepsilon^2 \underbrace{\left[\frac{1}{2} g_{ij}(q_0) \dot{\eta}_i \dot{\eta}_j - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j}(\vec{q}_0) \eta_i \eta_j \right]}_{L_\eta} + O(\varepsilon^3) \quad (11.10)$$

$$\varepsilon \vec{\eta} \rightarrow \vec{q} : L_\eta = \frac{1}{2} g_{0ij} \dot{q}_i \dot{q}_j - \frac{1}{2} V_{0ij} q_i q_j \quad (11.11)$$

$$\text{mit } V_{0ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j}(q_0) + \frac{\partial^2 V}{\partial q_j \partial q_i}(q_0) \right) \quad (11.12)$$

$$\text{wegen } T_{ij} q_i q_j = \frac{1}{2} T_{ij} (q_i q_j + q_j q_i) = \frac{1}{2} (T_{ij} + T_{ji}) q_i q_j \quad (11.13)$$

$$\text{und } g_{0ij} = \frac{1}{2} (g_{ij}(q_0) + g_{ji}(q_0)) \quad (11.14)$$

Wir schreiben ($L_\eta \rightarrow L$)

$$L = \frac{1}{2} \dot{\vec{q}}^T g_0 \dot{\vec{q}} - \frac{1}{2} \vec{q}^T V_0 \vec{q} \quad (11.15)$$

mit konstanten, symmetrischen Matrizen g_0 , V_0 . Symmetrische Matrizen sind diagonalisierbar

$$g'_0 = R_g^T g_0 R_g = \begin{pmatrix} \gamma_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \gamma_N \end{pmatrix} \text{ mit } \gamma_i \geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, N \quad (11.16)$$

$$R_g \in SO(N) \text{ mit } R_g R_g^T = 1_N \quad (11.17)$$

$$V'_0 = R_g^T V R_g \text{ symmetrisch !} \quad (11.18)$$

Sei $\vec{q} = R \vec{q}'$ und damit $\dot{\vec{q}} = R \dot{\vec{q}}'$, da $\dot{R} = 0$.

$$L = \frac{1}{2} \dot{\vec{q}}'^T (R^T g_0 R) \dot{\vec{q}}' - \frac{1}{2} \vec{q}'^T (R^T V_0 R) \vec{q}' \quad (11.19)$$

$$\Rightarrow L = \frac{1}{2} \underbrace{\dot{\vec{q}}'^T g'_0 \dot{\vec{q}}'}_{\sum_i \gamma_i \dot{q}_i'^2} - \frac{1}{2} \vec{q}'^T V'_0 \vec{q}' \quad (11.20)$$

Definiere $\vec{q}''_i = \sqrt{\gamma_i} \vec{q}'_i$ (keine Summe!)

$$\Rightarrow L = \frac{1}{2} \dot{\vec{q}}''^2 - \frac{1}{2} \vec{q}''^T V''_0 \vec{q}'' \quad (11.21)$$

mit $V_{0'ij}'' = \frac{1}{\sqrt{\gamma_i}} V_{0'ij}' \frac{1}{\sqrt{\gamma_j}}$ (keine Summe!) V_0'' symmetrisch! (11.22)

Definiere $\vec{q}'' = R_v \vec{q}$ (abuse of notation)

mit $R_v^T V_0'' R_v = \begin{pmatrix} v_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & v_N \end{pmatrix}$, $R_v \in SO(N)$ $R_v^T R_v = 1_N$ (11.23)

$\rightarrow L = \frac{1}{2} \dot{\vec{q}}^T \dot{\vec{q}} - \frac{1}{2} \sum_i v_i q_i^2$ (11.24)

$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (\dot{q}_i^2 + v_i q_i^2)$ (11.25)

Ergebnis: $L = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (\dot{q}_i^2 + v_i q_i^2)$ (11.26)

Bewegungsgleichungen: $\ddot{q}_i = -v_i q_i$ (11.27)

N unabhängige kanonische Oszillatoren mit $\omega_i = \sqrt{v_i}$
Bemerkungen:

(1)

$\left. \begin{matrix} V_0 & n \text{ EW} \geq 0 \\ N - n & \text{EW} \leq 0 \end{matrix} \right\} \begin{matrix} n & v_i \geq 0 \\ N - n & v_i \leq 0 \end{matrix}$ (11.28)

$v_i \geq 0 \quad \forall i$ stabile Ruhelage (11.29)

$v_i \leq 0$ instabile Ruhelage (11.30)

ABBILDUNG

(2) zyklische Koordinaten: oBdA q_1

$\frac{\partial^2 V}{\partial q_1 \partial q_i} = 0 \quad \forall i$ (11.31)

$\Rightarrow V_{0'ij} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \hat{V}_{0'ij} & \\ 0 & & \end{pmatrix} \rightarrow v_{i_1} = 0$ (11.32)

Es folgt $\ddot{q}_{i_1} = 0 \curvearrowright q_{i_1} = \bar{q}_{i_1} + v_{i_1} t$
Nur für $v_{i_1} = q_{i_1}(t)$ klein $\forall t$

(3) Das vorgestellte System umfasst sowohl 1 dim. Bewegungen z.B. ABBILDUNG, als auch mehrdimensionale Bewegungen. ABBILDUNG

11.2 Lineare Kette

Anwendung: Schallwellen in Festkörper
ABBILDUNG

$$L = \sum_i \frac{m}{2} \dot{q}_i^2 - \sum_{i=2}^N \frac{\kappa}{2} (q_{i+1} - q_i)^2 \quad (11.33)$$

mit $q_{N+1} = q_1$ ABBILDUNG
11.33 hat die Struktur wie 11.20 mit

$$g_{0ij} = m\delta_{ij} \quad (11.34)$$

$$v_{0ij} = \kappa(2\delta_{ij} - \delta_{ij-1} - \delta_{ij+1}) \quad (11.35)$$

$$\text{z.B.: } N = 2 : \quad v_0 = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \kappa \quad (11.36)$$

$$N = 3 : \quad v_0 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \kappa \quad (11.37)$$

$N = 2$: $\vec{q} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}$, v_0 hat Eigenwerte $\lambda_{1,2} = 0, 2\kappa$ mit $\det(\kappa - \lambda 1) = (2\kappa - \lambda)^2$

und Eigenwerte $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Außerdem: $\left(\frac{\partial}{\partial q_1} + \frac{\partial}{\partial q_2}\right)v(\vec{q}) = 0$

$$\text{Variablentransformation: } \begin{pmatrix} q_- \\ q_+ \end{pmatrix} = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{R_v^T} \vec{q} \quad (11.38)$$

$$(11.39)$$

$$\vec{q} \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}(q_1 - q_2) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(q_1 + q_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_- \\ q_+ \end{pmatrix} \quad (11.40)$$

$$V(\vec{q}) = \hat{V}(q_-) = \frac{\kappa}{2} q_-^2 \quad (11.41)$$

$$\text{und } \frac{\partial}{\partial q_+} v = 0, \quad v_0 \rightarrow R_v^T v_0 R_v = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (11.42)$$

Kinetischer Term:

$$\frac{1}{2} m (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) = \frac{1}{2} m (\dot{q}_+^2 + \dot{q}_-^2) \quad (11.43)$$

$$\text{EL: } \ddot{q}_+ = 0, \quad \ddot{q}_- = \frac{\kappa}{m} q_- \quad (11.44)$$

11.2.1 Kontinuumsimes

Ruhelage: $x_i = q_0$, $x_{i+1} - x_i = \Delta x$ unabhängig von i

Auslenkung: $q(x_i) = q_i$

Annahme: Benachbarte Auslenkungen $q(x_i)$, $q(x_{i-1})$, $q(x_{i+1})$ unterscheiden sich nicht zu stark

$$\text{Dann: } (q_{i+1} - q_i) = \Delta x \frac{(q_{i+1} - q_i)}{\Delta x} \quad (11.45)$$

$$=: \Delta x q'(x_i) \quad (11.46)$$

$$\text{Es folgt } L = \sum_i \Delta x \left[\frac{1}{2} \frac{m}{\Delta x} \dot{q}^2(x_i) - \frac{\kappa \Delta x}{2} q'(x_i)^2 \right] \quad (11.47)$$

Nun $\Delta x \rightarrow 0$ mit $\frac{m}{\Delta x} \rightarrow \rho$, $\kappa \Delta x \rightarrow d$, $\sum_i \Delta x \rightarrow \int dx$
Lagrangefunktion: 11.47, $q = q(x, t)$

$$L = \int dx \left[\frac{1}{2} \rho \dot{q}^2 - \frac{d}{2} q'^2 \right] \quad (11.48)$$

$$\text{und } S[q] = \int dt L = \int dt dx \left[\frac{\rho}{2} \dot{q}^2 - \frac{d}{2} q'^2 \right] \quad (11.49)$$

$$= \int dt dx L \quad (11.50)$$

L: Lagrangedichte einer Feldtheorie mit skalarem Feld $q(x, t)$
ABBILDUNG

$$L = \frac{\rho}{2} \dot{q}^2 - \frac{d}{2} q'^2 \quad \text{mit} \quad q' = \frac{\partial q}{\partial x}, \quad \dot{q} = \frac{\partial q}{\partial t} \quad (11.51)$$

Bewegungsgleichungen aus dem Wirkungsprinzip:

$$q(x, t) \text{ Lösung der Bewegungsgleichung} \quad (11.52)$$

$$q(x, t) + \varepsilon \delta q(x, t) \text{ Variation um } q(x, t) \text{ mit } \delta q|_{\text{Rand}} = 0 \quad (11.53)$$

$$\Rightarrow \left. \frac{dS}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = 0 \quad (11.54)$$

mit

$$(\dot{q} + \varepsilon \delta \dot{q})^2 = \dot{q}^2 + 2\varepsilon \dot{q} \delta \dot{q} \quad (11.55)$$

$$(q' + \varepsilon \delta q')^2 = q'^2 + 2\varepsilon q' \delta q' \quad (11.56)$$

Es folgt

$$\left. \frac{dS}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = \int dt dx [\rho \dot{q} \delta \dot{q} - dq' \delta q'] \quad (11.57)$$

$$= \int dt dx [-\rho \ddot{q} - dq''] \delta q = 0 \quad (11.58)$$

$$\Rightarrow \rho \ddot{q} - dq'' = 0 \quad (11.59)$$

oder $\ddot{q} - c^2 q'' = 0$ Wellengleichung mit $c^2 = \frac{d}{\rho}$ Ausbreitungsgeschwindigkeit im Festkörper: Schallgeschwindigkeit

$$\text{Lösung } q(x, t) = A \cos k(x - ct - x_0) \quad (11.60)$$

mit Integrationskonstante A : Amplitude, kc : Frequenz (Kreisfrequenz), x_0 : Anfangsbedingung

Festkörper: ABBILDUNG

$$\left. \begin{array}{l} x \rightarrow \vec{x} \\ q_i \rightarrow \vec{q}_i \end{array} \right\} \vec{q}(\vec{x}, t) \quad (11.61)$$

kinetischer Term: $\frac{\rho}{2} \dot{\vec{q}}^2$ mit $\rho = \frac{m}{\Delta V}$

Potential: quadratisch in $\frac{\partial}{\partial x_i} q_j$

Allgemein: $\frac{1}{2} d_{ijnm} \frac{\partial q_i}{\partial x_n} \frac{\partial q_j}{\partial x_m}$

$$\Rightarrow L = \frac{1}{2} \rho \dot{\vec{q}}^2 - \frac{1}{2} d_{ijnm} \frac{\partial q_i}{\partial x_n} \frac{\partial q_j}{\partial x_m} \quad (11.62)$$

mit elastischen Konstanten d_{ijnm} (Tensor 4. Stufe)

Wirkung: $S = \int dt d^3 x L$

Isotroper Festkörper:

$$d_{ijnm} = \lambda \delta_{ij} \delta_{nm} + \mu (\delta_{in} \delta_{jm} + \delta_{im} \delta_{jn}) \quad (11.63)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} d_{ijnm} \frac{\partial q_i}{\partial x_n} \frac{\partial q_j}{\partial x_m} = \frac{1}{2} \lambda \vec{\nabla} q_i \vec{\nabla} q_j + \frac{1}{2} \mu \left((\vec{\nabla} \vec{q})^2 + \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \vec{q} \right) \vec{\nabla} q_i \right) \quad (11.64)$$

$$\text{oder } \int dt d^3 x L = \int dt d^3 x \left[\frac{L}{2} \rho \dot{q}^2 + \frac{1}{2} \lambda \left(\vec{q} \vec{\nabla}^2 \vec{q} + \vec{q} \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \vec{q}) - (\vec{\nabla} \vec{q})^2 \right) \right] \quad (11.65)$$

11.3 Wirkungsprinzip

Lagrangedichte: skalares Feld q oder Vektorfeld \vec{q}
z.B.

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \rho \dot{q}^2 - V(\vec{q})$$

oder allgemeiner

$$\mathcal{L}(q(\vec{x}, t), \vec{\nabla} q(\vec{x}, t), \dot{q}(\vec{x}, t); x, t) \quad \text{und} \quad S[q] = \int dt d^3x \mathcal{L}$$

Sei $q(\vec{x}, t)$ Lösung der Bewegungsgleichung: $q(\vec{x}, t) + \varepsilon \delta q$

$$\boxed{\left. \frac{dS}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = 0}$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \int dt d^3x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \delta q + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial q}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_i} \delta q + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \right] \\ &= \int dt d^3x \delta q \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} - \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial q}{\partial x_i}} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right] = 0 \\ &\Rightarrow \boxed{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} - \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial q}{\partial x_i}} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = 0} \end{aligned}$$

Euler-Lagrange-Gleichungen der Feldtheorie

11.4 Schwingende Saite / Membran

Mit dem Wirkungsprinzip von 11.2.1 lässt sich jetzt ohne die Behandlung des diskreten Systems die Physik kontinuierlicher Systeme behandeln.

Schwingende Saite (z.B. Cellosaite)

Länge der Saite: l

$$l = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{d^2x + d^2y} = \int_{x_0}^{x_1} dx \sqrt{1 + y'^2}$$

Diskret: Newtonsche Gesetze \Rightarrow Lagrangefunktion $L = \sum_i L_i$.

Kontinuumsmechanik: Suche Wirkung

$$S = \int d\tau dx \mathcal{L}$$

$$\int dx \mathcal{L} = T - V$$

Kinetische Energie: $T = \frac{1}{2} \int dx \rho \dot{y}(x)^2$

Potentielle Energie: $V = F \Delta l = F \left(\int_{x_0}^{x_1} dx \sqrt{1 + y'^2} - \int_{x_0}^{x_1} dx \right)$

Cello: $l_0 \approx 60\text{cm}$ (gespannte Saite), $h \approx 1\text{cm}$ (maximale Auslenkung der Saite).

$$V = \frac{F}{2} \int_{x_0}^{x_1} dx y'^2 + o(y'^4)$$

$$\Rightarrow L = \int dx \left(\frac{\rho}{2} \dot{y}^2 - \frac{F}{2} y'^2 \right)$$

$$\mathcal{L} = \frac{\rho}{2} \dot{y}^2 - \frac{F}{2} y'^2$$

Euler-Lagrange Gleichung:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y'} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} = 0$$

$$0 + F y'' - \rho \ddot{y} = 0$$

oder

$$\boxed{\ddot{y} - c^2 y'' = 0} \quad \text{mit } c = F/\rho \quad (11.66)$$

Lösung: In unserem Fall $y(x_0, t) = y(x_1, t) = 0$, $x_0 = 0$, $x_1 = l$

$$\begin{aligned} \Rightarrow y(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi x}{l}n\right) \varphi_n(t) \\ \Rightarrow c^2 \frac{\pi^2 n^2}{l^2} \varphi_n(t) - \ddot{\varphi}_n(t) &= 0 \\ \Rightarrow \varphi_n(t) &= c_n \cos \omega_n t + d_n \sin \omega_n t \\ \Rightarrow y(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi x}{l} n (c_n \cos \omega_n t + d_n \sin \omega_n t) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[(c_n + d_n) e^{i \frac{\pi n}{l} (x+ct)} - (c_n - d_n) e^{-i \frac{\pi n}{l} (x-ct)} \right] \end{aligned}$$

Bernoulli Lösung, auch der φ Separationsansatz.

Tatsächlich ist jede Funktion der Form

$$(x, t) + f_+(x + ct) + f_-(x - ct) \quad (\text{d'Alembert})$$

eine Lösung von 11.66 (einsetzen).

Oder:

$$\begin{aligned} &\left[\left(\frac{d}{dt} \right)^2 - \left(c \frac{d}{dx} \right)^2 \right] y(x, t) \\ &= \left(\frac{d}{dt} + c \frac{d}{dx} \right) \left(\frac{d}{dt} - c \frac{d}{dx} \right) y(x, t) \end{aligned}$$

mit

$$\left(\frac{d}{dt} \pm c \frac{d}{dx} \right) f_{\mp}(x \mp ct) = 0$$

Bild mit stehenden Wellen, $n = 1, 2, 3$, Grundton, Oberton. $\omega_n = \frac{n\pi c}{l}$.

$$\begin{aligned} n = 1 : \quad \text{Frequenz } \omega_1 &= \frac{\pi c}{l}, \\ n = 2 : \quad \text{Frequenz } \omega_2 &= \frac{2\pi c}{l}. \end{aligned}$$

Membran

$$z|_{x_1^2 + x_2^2 = R} = 0.$$

$$\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2} \int_A dx_1 dx_2 \rho (\dot{z}(x_1, x_2, t))^2 \\
V &= f \int_A \left(\sqrt{d^2 x_1 + d^2 z} \sqrt{d^2 x_2 + d^2 z} - dx_1 dx_2 \right) \\
&= f \int_A dx_1 dx_2 \left(\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x_1} \right)^2} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x_2} \right)^2} - 1 \right) \\
&= \frac{f}{2} \int_A dx_1 dx_2 \left[\left(\frac{\partial z}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial x_2} \right)^2 \right] + o \left(\left(\frac{\partial z}{\partial(x_1, x_2)} \right)^4 \right) \\
\Rightarrow \mathcal{L} &= \boxed{\frac{\rho}{2} \dot{z}^2 - \frac{f}{2} (\nabla z)^2} \quad \text{mit } \nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2} \right) \\
\Rightarrow EL : \boxed{\ddot{z} - c^2 \nabla^2 z = 0} \quad \text{mit } c = f/\rho.
\end{aligned}$$

Lösung durch Separation:

$$z = g(x_1, x_2) \varphi(t) \quad (11.67)$$

Mit $\ddot{z}/z = c^2 \nabla^2 z/z$ folgt $\ddot{\varphi}(t)/\varphi(t) = \frac{c^2 \nabla^2 g(x_1, x_2)}{g(x_1, x_2)}$. Wähle $\frac{\nabla^2 g(x_1, x_2)}{g(x_1, x_2)} = -k^2$.

(11.68)

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{\varphi}(t) = -k^2 c^2 \varphi(t)} \quad (11.69)$$

Lösung: $\varphi(t) = \alpha \cos kct + \beta \sin kct$.

Zylindersymmetrie:

$$\begin{aligned}
x_1 &= \rho \cos \theta \\
x_2 &= \rho \sin \theta.
\end{aligned}$$

$$g(x_1, x_2) = g_\rho(\rho) \cdot g_\theta(\theta)$$

und

$$\nabla^2 = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}.$$

Es folgt

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{\rho \partial_\rho g_\rho}{g_\rho} \right) + \frac{\partial^2 g_\theta}{\partial \theta^2} / g_\theta = -k^2 \rho^2$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 g_\theta}{\partial \theta^2} = -n^2 g_\theta}$$

$$\boxed{\frac{1}{\rho} \partial_\rho g_\rho + \partial_\rho^2 g_\rho (k^2 \rho^2 + n^2) g_\rho} \quad \text{Besselgl.}$$

Lösung: $J_n(k\rho), N_n(k\rho)$ ($N_n(\alpha \rightarrow 0) \rightarrow -\infty$) und damit, $J_n(x)$ hat Nullstellen bei x_{nm} :

$$z = J_n(k_{nm}\rho)(\alpha \cos k_{nm}ct + \beta \sin k_{nm}ct)$$

mit $k_{nm} = x_{nm}/R$:

Nullstellen der Besselfunktion: $J_n(x)$:

$\downarrow n, \rightarrow m$	1	2	3	$n \rightarrow \infty$
0	2.405	5.520	8.654	$(2n-1)\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$
1	3.832	7.016	10.173	$n\pi + \frac{\pi}{4}$
2	5.136	7.417	11.620	$(n-1)\pi - \frac{\pi}{4}$