1. Präsenzübungsblatt zur Vorlesung Theoretische Physik I (Mechanik)

Lösen der Aufgaben: in den Übungen der 2. Semesterwoche (25./26.10.06)

Aufgabe P1:

Gegeben seien die Eigenschaften des Skalar- und Vektorprodukts von Basisvektoren $\mathbf{e}_i$ eines Orthonormalsystems ($\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$, $\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3$, etc.).

a. Ermitteln Sie die Werte der "Entwicklungskoeffizienten" ϵ_{ijk}, indem Sie folgenden Ausdruck für Basisvektoren studieren (Einstein-Summenkonvention: über doppelt auftretende Indizes wird summiert),

$$\mathbf{e}_k \times \mathbf{e}_l = \epsilon_{klj}\, \mathbf{e}_j .$$

b. Stellen Sie mit Hilfe dieses ϵ-Symbols das Spatprodukt $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ dar und zeigen Sie den Zusammenhang des Spatprodukts zur Determinante.

c. Betrachten Sie das zweifache Vektorprodukt $\mathbf{e}_i \times (\mathbf{e}_k \times \mathbf{e}_l)$, um die wichtige Identität

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{lmk} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}$$

zu zeigen. *Hinweis:* Bestimmen Sie zunächst die Koeffizienten a, b und c in dem Ansatz $\mathbf{e}_i \times (\mathbf{e}_k \times \mathbf{e}_l) = a\,\delta_{kl}\,\mathbf{e}_i + b\,\delta_{il}\,\mathbf{e}_k + c\,\delta_{ik}\,\mathbf{e}_l$.

d. Zeigen Sie, dass

$$\epsilon_{ijk}\delta_{ij} = 0, \quad \epsilon_{ijk}\epsilon_{ljk} = 2\delta_{il}, \quad \epsilon_{ijk}\epsilon_{ijk} = 6.$$

Aufgabe P2:

Zeigen Sie, dass

$$(a) \quad \nabla r^n = n\, r^{n-1}\, \hat{\mathbf{r}}, \qquad (b) \quad \nabla f(r) = \hat{\mathbf{r}}\, \frac{df}{dr}.$$

Welche der folgenden Kräfte lassen sich auf ein Potential zurückführen?

$$(c) \quad \mathbf{F} = \frac{1}{r^3}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \qquad (d) \quad \mathbf{F} = \frac{1}{r^3}\begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe P3:

Man benutze den Gaußschen Satz, um das geschlossene Flächenintegral $\oint_F \mathbf{A} \cdot \mathbf{df}$ zu berechnen, wobei

$$\mathbf{A} = x_1^3\,\mathbf{e}_1 + x_2^3\,\mathbf{e}_2 + x_3^3\,\mathbf{e}_3,$$

und F die Fläche einer Einheitskugel mit dem Mittelpunkt im Koordinatenursprung bezeichnen. Zur Probe berechne man das Flächenintegral direkt.

Aufgabe P4:

Berechnen Sie für die Vektorfunktion

$$\mathbf{F} = (x_1 + 2)x_2^2\,\mathbf{e}_1 + 4x_1x_2\,\mathbf{e}_2,$$

das Linienintegral entlang des Einheitsquadrats in der x_1x_2-Ebene (linke untere Ecke im Ursprung, Integration gegen den Uhrzeigersinn), und zwar (a) direkt und (b) nach dem Stokesschen Satz.