12. Übungsblatt zur Vorlesung Theoretische Physik I (Mechanik)

Abgabe der Lösungen: in der Vorlesung am 2.2.2007

Aufgabe 1: (4 Punkte)

a. Ein Massenpunkt bewegt sich im eindimensionalen Raum im Potential

$$V(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}.$$

Berechnen und skizzieren Sie das Vektorfeld $\vec{\omega}_\Gamma = (\dot{x}, \dot{p})$ im Phasenraum. Überzeugen Sie sich, dass $\vec{\nabla}_\Gamma \cdot \vec{\omega}_\Gamma = 0$ ist.

b. Die Hamiltonfunktion eines geladenen Teilchens im zeitunabhängigen elektromagetischen Feld ist

$$H = \frac{1}{2m}\left(\vec{p} - \frac{q}{c}\vec{A}(\vec{x})\right)^2 + q\Phi(\vec{x}).$$

Berechnen Sie das Vektorfeld $\vec{\omega}_\Gamma = (\dot{\vec{x}}, \dot{\vec{p}})$. Zeigen Sie, dass $\vec{\nabla}_\Gamma \cdot \vec{\omega}_\Gamma = 0$ ist.

Aufgabe 2: (3 Punkte)

Sei F die Erzeugende einer kanonischen Transformation mit

a. $F = F_3(\vec{p}, \vec{Q}, t) + \vec{p} \cdot \vec{q}$,

b. $F = F_4(\vec{p}, \vec{P}, t) + \vec{p} \cdot \vec{q} - \vec{P} \cdot \vec{Q}$.

Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen von F_3 und F_4.

Aufgabe 3: (2 Punkte)

Transformieren Sie die Hamiltonfunktion des harmonischen Oszillators,

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m}{2}\omega^2 q^2, \quad \omega^2 = \frac{D}{m},$$

mit der Erzeugenden

$$F_1(q, Q) = \frac{m}{2}\omega q^2 \cot Q.$$

Berechnen Sie die Lösung $q(t)$.

Aufgabe 4: (1 Punkt)

Zeigen Sie, dass die Transformation $P = \frac{1}{2}(q^2 + p^2)$, $Q = \arctan\frac{q}{p}$ kanonisch ist. Was ist die Erzeugende?