4. Übungsblatt zur Vorlesung Theoretische Physik I (Mechanik)

Abgabe der Lösungen: in der Vorlesung am 17.11.06

Aufgabe 1: (4 Punkte)

Ein Koordinatensystem sei so gewählt, daß sich die Erde mit Masse M_1 am Ort $\mathbf{r}_1 = (0, 0, 0.9d)$ und der Mond mit Masse M_2 am Ort $\mathbf{r}_2 = (0, 0, -0.1d)$ befindet (d sei hierbei die momentane Distanz zwischen Erde und Mond). Die von den Massen M_i auf eine Probemasse m am Ort $\mathbf{r}$ wirkenden Gravitationskräfte sind durch $\mathbf{F}_i = -\gamma m M_i \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}_i}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|^3}$ gegeben.

a. Zeigen Sie, daß bei einem Verhältnis $M_2 : M_1 = 1 : 81$ das Koordinatensystem gerade so gewählt wurde, daß sein Ursprung im sogenannten abarischen, d.h. schwerelosen, Punkt liegt. Eine Entwicklung des Kraftfelds um den Ursprung ergibt in linearer Ordnung $\mathbf{F} = A(-x, -y, \beta z)$. Bestimmen Sie die Konstanten A und β.

b. Ist das Kraftfeld $\mathbf{F} = A(-x, -y, \beta z)$ konservativ? Berechnen Sie das zugehörige Potential V, und diskutieren Sie die Äquipotentialflächen $V(\mathbf{r})$ =const. (Skizze in der x-z–Ebene). Ist der abarische Punkt stabil?

Aufgabe 2: (3 Punkte)

Für das Keplerproblem $V(r) = -\gamma m M/r$ ist neben Energie und Drehimpuls der Lenz'sche Vektor $\mathbf{S} = \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{L} - \gamma m M \mathbf{e}_r$ eine Erhaltungsgröße (Drehimpuls $\mathbf{L} = m\,\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}$, $\mathbf{e}_r \equiv \mathbf{r}/|\mathbf{r}|$).
Zeigen Sie unter Verwendung der Bewegungsgleichung, daß $\dot{\mathbf{S}} = 0$. In welcher Ebene liegt $\mathbf{S}$?
Wählen Sie die Anfangsbedingungen $\mathbf{r} = (s, 0, 0)$ und $\dot{\mathbf{r}} = (0, v_0, 0)$. Verwenden Sie die Drehimpulserhaltung und die Erhaltung des Lenz'schen Vektors, und leiten Sie daraus die Gleichung

$$y^2 = \lambda(\lambda - 2)x^2 - 2\lambda(\lambda - 1)sx + \lambda^2 s^2, \qquad \lambda = \frac{s v_0^2}{\gamma M},$$

für die Bahnkurven ab. Für welche Werte des Parameters λ ergeben sich Parabel, Kreis, Gerade, Hyperbel und Ellipse?

Aufgabe 3: (3 Punkte)

Ein Punktteilchen (Masse m) gleitet im homogenen Gravitationsfeld (Kraft in negative y-Richtung) reibungsfrei auf dem Mantel eines Zylinders (Zylinderachse entlang der z-Achse, Radius R). Wie lautet die Zwangsbedingung? Führen Sie geeignete generalisierte Koordinaten ein. Wo verliert die Zwangsbedingung ihre Gültigkeit (d.h. an welcher Stelle hebt das Teilchen ab), wenn das Teilchen im Punkt (x,y,z)=(0,R,0) aus der Ruhe heraus startet? *Hinweis:* In der Vorlesung wurde gezeigt, dass die Kraft, die ein Teilchen auf einer Kreisbahn hält, $|\mathbf{F}| = mR\dot{\varphi}^2$ beträgt.