5. Übungsblatt zur Vorlesung Theoretische Physik I (Mechanik)

Abgabe der Lösungen: in der Vorlesung am 24.11.06

Aufgabe 1: (6 Punkte)

Auf einem parabelförmig gebogenen Draht ($z = ax^2 + ay^2$), der mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω um die z-Achse rotiert, gleitet eine Perle. Die Schwerkraft wirkt in negative z-Richtung.

a. Stellen Sie die Zwangsbedingungen $f_1(\vec{x}, t) = 0$ und $f_2(\vec{x}, t) = 0$ auf. Führen Sie Zylinderkoordinaten (r, φ, z) als generalisierte Koordinaten ein. Benutzen Sie die Zwangsbedingungen, um zwei Koordinaten zu eliminieren. Bestimmen Sie den Tangentialvektor $\vec{\tau}_r$ und die Normalenvektoren $\vec{\nu}_1$, $\vec{\nu}_2$.

b. Ermitteln Sie die Bewegungsgleichung aus dem d'Alembertschen Prinzip mit

$$(m\ddot{\vec{x}} - \vec{F}) \cdot \vec{\tau}_r = 0.$$

c. Leiten Sie die Bewegungsgleichung auch aus der Lagrangefunktion des Systems her.

Aufgabe 2: (2 Punkte)

Zeigen Sie, dass sich die elektromagnetischen Felder $\vec{E}$ und $\vec{B}$ und somit auch die Bewegungsgleichung $m\ddot{\vec{x}} = q(\vec{E} + \frac{1}{c}\vec{v} \times \vec{B})$ nicht ändern, wenn man das Vektorpotential $\vec{A}$ und das skalare Potential ϕ wie folgt transformiert,

$$\vec{A} \to \vec{A} + \vec{\nabla}\alpha, \qquad \phi \to \phi - \frac{1}{c}\partial_t \alpha,$$

wobei α eine beliebige Funktion von $\vec{x}$ und t ist, $\alpha = \alpha(\vec{x}, t)$. Wie ändert sich die Lagrangefunktion L?

Aufgabe 3: (2 Punkte)

Eine Perle gleitet reibungsfrei auf einem ruhenden kreisförmigen Draht im zweidimensionalen Raum. Es wirken keine äußeren Kräfte. Berechnen Sie den Normalenvektor $\vec{\nu}$, den Koeffizienten $\Gamma^1{}_{11}$ zur generalisierten Koordinate $q = \varphi$,

$$\Gamma^1{}_{11} \equiv \frac{\partial^2 \vec{x}}{\partial \varphi^2} \cdot \vec{\nu},$$

und daraus die Zwangskraft in Normalenrichtung. Interpretieren Sie das Ergebnis.