Institut für Theoretische Physik
Universität Heidelberg
Jan M. Pawlowski

Poincaré-Transformationen

Die inhomogenen Lorentz-Transformationen eines Vektors x im Minkowskiraum mit Metrik η sind durch

$$\mathcal{P} \ni g(\Lambda, a): \; x \mapsto x' = \Lambda x + a \qquad \text{mit} \qquad \Lambda^T \eta \, \Lambda = \eta \,, \qquad a \in \mathbb{R}^4 \tag{1}$$

gegeben. Dies definiert die Poincaré-Gruppe $\mathcal{P}$.

a) Zeige, daß die Multiplikation in $\mathcal{P}$ wie folgt dargestellt werden kann,

$$\mathcal{P} \ni g, g': \; g'g \equiv g(\Lambda', b) g(\Lambda, a) = g(\Lambda'\Lambda, \Lambda' a + b) \,. \tag{2}$$

Nun betrachte eine Darstellung $D : \mathcal{P} \ni g \mapsto U_g \equiv U(\Lambda, a)$ durch (unitäre) Operatoren.

b) Zeige, daß diese wie folgt zerlegt werden können,

$$U(\Lambda, a) = T(a) U(\Lambda) \,, \quad U(\Lambda) \equiv U(\Lambda, 0) \;\; \text{und} \;\; T(a) \equiv U(\mathbb{1}, a) = \exp\{-i a^\mu P_\mu\} \,, \tag{3}$$

wobei $T(a)$ eine durch den Impulsoperator P^μ erzeugte Translation darstellt. Benutze dies, um zu zeigen, daß die Translationen eine invariante Untergruppe von $\mathcal{P}$ sind,

$$U(\Lambda, b) \, T(a) \, U^{-1}(\Lambda, b) = T(\Lambda a) \,. \tag{4}$$

Die eigentliche orthochrone Lorentzgruppe $\mathcal{L}_+^\uparrow$ ist definiert durch die (4×4) Matrizen Λ, die die Metrik η im Minkowskiraum invariant lassen,

$$\Lambda^T \eta \Lambda = \eta \,, \quad \eta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \quad \det \Lambda = 1, \quad \Lambda^0{}_0 \geq 1 \,, \tag{5}$$

Sie wird erzeugt durch die Exponentialabbildung der Algebra

$$l_+^\uparrow = \{ X \in \mathbb{R}^{4,4} \; : \; e^{tX} \in \mathcal{L}_+^\uparrow \,, t \in \mathbb{R} \} \,. \tag{6}$$

c) Zeige, daß

$$X^T \eta = -\eta X \;\Leftrightarrow\; X \in l_+^\uparrow \,, \tag{7}$$

und somit $\dim_{\mathbb{R}} l_+^\uparrow = 6$. Eine Basis für $l_+^\uparrow$ ist gegeben durch die jeweils 3 Erzeugenden von Drehungen und Boosts,

$$iJ_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} , \quad iJ_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} , \quad iJ_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ,$$

$$-iK_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} , \quad -iK_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} , \quad -iK_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

d) Zeige, daß diese Erzeugenden die folgenden Liealgebrarelationen erfüllen:

$$
\begin{aligned}
[J_i, J_j] &= i\epsilon_{ijk} J_k \;, & [N_i, N_j] &= i\epsilon_{ijk} N_k \;, \\
[J_i, K_j] &= i\epsilon_{ijk} K_k \;, & [N_i^\dagger, N_j^\dagger] &= i\epsilon_{ijk} N_k^\dagger \;, \\
[K_i, K_j] &= -i\epsilon_{ijk} J_k \;, & [N_i, N_j^\dagger] &= 0 \;,
\end{aligned}
$$

wobei rechts die Basis $N_i = (J_i + iK_i)/2$ eingeführt wurde. Diese Relationen können zusammengefaßt werden durch

$$
\begin{aligned}
M_{0i} = -M_{i0} = K_i \,, \quad M_{ij} = \epsilon_{ijk} J_k \,, \quad \text{mit} \\
[M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] = -i(M_{\mu\rho}\eta_{\nu\sigma} - M_{\mu\sigma}\eta_{\nu\rho} - M_{\nu\rho}\eta_{\mu\sigma} + M_{\nu\sigma}\eta_{\mu\rho}) \;,
\end{aligned}
\tag{8}
$$

und man erhält $\Lambda(\omega) = e^{\frac{i}{2}\omega^{\mu\nu}M_{\mu\nu}}$. Der Tensor $\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}$ enthält die 6 reellen Parameter der Transformation.

Allgemein bezeichnet man eine Darstellung $D:\ g \mapsto U_g$ einer Gruppe G durch lineare Abbildungen auf einem Vektorraum V als irreduzibel, wenn V keine D-invarianten Teilräume besitzt (außer den trivialen, die durch den Nullvektor und V selbst gegeben sind). Ein Untervektorraum $W \subset V$ wäre hierbei genau dann D-invariant, wenn $\forall g \in G, |w\rangle \in W \;:\; U_g|w\rangle \in W$.

e) Zeige, daß der Operator $P^2 = P_\mu P^\mu$ in einer irreduziblen Darstellung der Poincaré-Gruppe auf V durch ein vielfaches des Einheitsoperators gegeben ist, $P^2 = c_1\,\mathrm{Id}(V)\,,\ c_1 \in \mathbb{R}$.

Man bezeichnet P^2 als einen Casimir-Operator. Daß dieser in irreduziblen Darstellungen dem Einheitsoperator proportional ist, ist ein Spezialfall des *ersten Schurschen Lemmas.*

Der Pauli-Lubanski-Vektor W^μ ist definiert durch

$$
W_\mu = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} P^\nu M^{\rho\sigma} \;. \tag{9}
$$

f) Zeige, daß er die folgenden Eigenschaften hat:

$$
\begin{aligned}
W^\mu P_\mu &= 0 \;, & [M_{\mu\nu}, W_\sigma] &= i(\eta_{\mu\sigma}W_\nu - \eta_{\nu\sigma}W_\mu) \;, \\
[W_\mu, P_\nu] &= 0 \;, & [W_\mu, W_\nu] &= i\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} W^\rho P^\sigma \;.
\end{aligned}
\tag{10}
$$

Der Operator $W^2 = W^\mu W_\mu$ kommutiert mit allen Elementen der Poincaré-Algebra (warum?). Es ist der zweite Casimir Operator der Poincaré-Gruppe, und $W^2 = c_2\,\mathrm{Id}(V)\,,\ c_2 \in \mathbb{R}$ in irreduziblen Darstellungen.