2. Die Gruppe $SL(2,\mathbb{C})$

Eine komplexe 2×2 Matrix α mit Determinante eins kann allgemein wie folgt dargestellt werden (warum?):

$$\alpha = \exp\{-i\vec{\omega}\cdot\frac{\vec{\sigma}}{2} + \vec{v}\cdot\frac{\vec{\sigma}}{2}\}\ , \tag{1}$$

wobei die ω_i, v_i reelle Parameter und die σ_i die Paulimatrizen sind und $\vec{f}\cdot\vec{g} = f_i g_i$. Die $SL(2,\mathbb{C})$-Matrix α beschreibt Lorentz-Transformationen $\Lambda(\alpha)$ eines Vektors V_μ mit

$$\hat{V} \xrightarrow{\Lambda(\alpha)} \alpha\hat{V}\alpha^\dagger \qquad \text{wobei} \qquad \hat{V} = V^\mu\sigma_\mu. \tag{2}$$

Dies impliziert $\Lambda^\mu{}_\nu = \frac{1}{2}\mathrm{Sp}\,\alpha\sigma_\nu\alpha^\dagger\sigma_\mu$.

a) Zeige, daß $\Lambda^0{}_0(\alpha) > 0$ und die zugehörige Lorentz-Transformation daher orthochron ist.

b) Zeige, daß für reine Drehungen $\alpha \in SU(2)$ und

$$\alpha = \exp\{i\vec{\omega}\cdot\frac{\vec{\sigma}}{2}\} = \cos\frac{\omega}{2}\,\mathbb{1} - i(\widehat{\omega}\cdot\vec{\sigma})\,\sin\frac{\omega}{2} \tag{3}$$

geschrieben werden kann, wobei $\omega = |\vec{\omega}|$ und $\widehat{\omega} = \frac{\vec{\omega}}{\omega}$ mit $\widehat{\omega}^2 = 1$. Woran erkennt man, daß der Parameterraum der $SU(2)$ durch $S^3 = \{x \in \mathbb{R}^4 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1\}$ gegeben ist? Was ist die Bedeutung von ω, $\widehat{\omega}$ und woran erkennt man hier die 2:1 Abbildung von $SU(2) \to SO(3)$?
Tip: Betrachte $\alpha(x) = x^\mu\sigma_\mu$ mit $\det\alpha(x) = 1$. Zeige außerdem, daß (1) eine Drehung des Vektors V um die Drehachse $\widehat{\omega}$ mit Drehwinkel ω darstellt. Für welche α gilt $V \xrightarrow{\Lambda(\alpha)} V$?

c) Betrachte nun einen reinen Lorentz-Boost in Richtung des Einheitsvektors $\widehat{v}$ mit Geschwindigkeit $\tanh v$ und zeige, daß dafür gilt:

$$\alpha = \exp\{\vec{v}\cdot\frac{\vec{\sigma}}{2}\} = \cosh\frac{v}{2}\,\mathbb{1} + (\widehat{v}\cdot\vec{\sigma})\,\sinh\frac{v}{2} \tag{4}$$

Hieraus folgt insbesondere $\Lambda^0{}_0(\alpha) \geq 1$, woran auch zusätzliche Drehungen nichts ändern.

d) Vergleiche (1) nun durch die Identifikationen $\omega_{0i} = -v_i$ und $\omega_{ij} = -\epsilon_{ijk}\,\omega_k$ mit $\Lambda(\omega) = e^{\frac{i}{2}\omega^{\mu\nu}M_{\mu\nu}}$ von Blatt 1, und zeige, daß dieselben Liealgebrarelationen hier mit

$$\vec{N} \mapsto \frac{\vec{\sigma}}{2} \qquad \text{und} \qquad \vec{N}^\dagger \mapsto 0 \tag{5}$$

realisiert sind. Man spricht daher von der $(\frac{1}{2},0)$-Darstellung obiger Liealgebra und benutzt die Bezeichnungen $U_{(\frac{1}{2},0)}(\vec{N}) = \vec{\sigma}/2$, $U_{(\frac{1}{2},0)}(\vec{N}^\dagger) = 0$. Zeige entsprechend, daß

$$U_{(\frac{1}{2},0)}(M_{\mu\nu}) = \frac{1}{2}\sigma_{\mu\nu}\ , \quad \text{mit}\ \sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2}(\bar{\sigma}_\mu\sigma_\nu - \bar{\sigma}_\nu\sigma_\mu)\ , \ \ \sigma_\mu := (\mathbb{1},\vec{\sigma})\ \text{ und }\ \bar{\sigma}_\mu := (\mathbb{1},-\vec{\sigma})\ .$$