Institut für Theoretische Physik
Universität Heidelberg
Jan M. Pawlowski

1. Superraum

Die Supersymmetriealgebra ist durch Erzeugende Q_α und $\bar{Q}_{\dot\alpha}$ mit der Algebra

$$\{Q_\alpha\,,\,\bar{Q}_{\dot\alpha}\} = 2i\sigma^a_{\alpha\dot\alpha}\mathcal{D}_a \qquad \text{mit} \qquad \mathcal{D}_a = \frac{\partial}{\partial x^a} \tag{1}$$

gegeben. Alle anderen (Anti)-kommutatoren zwischen $(Q, \bar{Q}, \mathcal{D})$ verschwinden. Seien $\mathcal{D}_\alpha$ und $\bar{\mathcal{D}}_{\dot\alpha}$ fermionische Erzeugende mit der Algebra

$$\{\mathcal{D}_\alpha\,,\,\bar{\mathcal{D}}_{\dot\alpha}\} = -2i\sigma^a_{\alpha\dot\alpha}\mathcal{D}_a \qquad \{\mathcal{D}_\alpha\,,\,\bar{Q}_{\dot\alpha}\} = \{\mathcal{D}_\alpha\,,\,Q_\alpha\} = 0\,, \tag{2}$$

alle anderen (Anti)-kommutatoren zwischen $(\mathcal{D}, \bar{\mathcal{D}})$ verschwinden. Zeigen Sie, daß aus

$$\xi^\alpha Q_\alpha + \bar\xi_{\dot\alpha}\bar{Q}^{\dot\alpha} \stackrel{!}{=} \xi^\alpha\mathcal{D}_\alpha + \bar\xi_{\dot\alpha}\bar{\mathcal{D}}^{\dot\alpha} + \xi^a\mathcal{D}_a \tag{3}$$

die Relationen

$$\mathcal{D}_\alpha\xi^a = 2i\sigma^a_{\alpha\dot\alpha}\bar\xi^{\dot\alpha}\,, \qquad \bar{\mathcal{D}}_{\dot\alpha}\xi^a = -2i\xi^\alpha\sigma^a_{\alpha\dot\alpha} \tag{4}$$

folgen. Überzeugen Sie sich, daß obige Algebren für die explizite Superaumdarstellung

$$Q_\alpha = \partial_\alpha - i\sigma^a_{\alpha\dot\alpha}\bar\theta^{\dot\alpha}\mathcal{D}_a \qquad \bar{Q}_{\dot\alpha} = \bar\partial_{\dot\alpha} + i\theta^\alpha\sigma^a_{\alpha\dot\alpha}\mathcal{D}_a \tag{5}$$

$$\mathcal{D}_\alpha = \partial_\alpha + i\sigma^a_{\alpha\dot\alpha}\bar\theta^{\dot\alpha}\mathcal{D}_a \qquad \bar{\mathcal{D}}_{\dot\alpha} = \bar\partial_{\dot\alpha} - i\theta^\alpha\sigma^a_{\alpha\dot\alpha}\mathcal{D}_a \tag{6}$$

und

$$\xi^a = 2i(\theta\sigma^a\bar\xi - \xi\sigma^a\bar\theta) \tag{7}$$

erfüllt sind. Dabei ist

$$\partial_\alpha = \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha}\,, \qquad \bar\partial^{\dot\alpha} = \frac{\partial}{\partial\bar\theta_{\dot\alpha}} \quad \to \quad \bar\partial_{\dot\alpha} = -\frac{\partial}{\partial\bar\theta^{\dot\alpha}}\,. \tag{8}$$

Beweisen Sie die letzte Relation.

2. Chirales Multiplett

Die Supersymmetrietransformation δ_ξ auf ein Feld ϕ ist definiert durch ($\xi^a = 0$)

$$\delta_\xi\phi = -(\xi^\alpha\mathcal{D}_\alpha + \bar\xi_{\dot\alpha}\bar{\mathcal{D}}^{\dot\alpha})\phi\,.$$

Ein chirales Feld erfüllt

$$\bar{\mathcal{D}}^{\dot\alpha}\phi = 0\,. \tag{9}$$

Sei ϕ ein skalares chirales Feld. Wir definieren die weiteren Felder im chiralen Multiplett mit

$$\chi_\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathcal{D}_\alpha\phi\,, \qquad F = -\frac{1}{4}\mathcal{D}^2\phi\,, \tag{10}$$

mit $\mathcal{D}^2 = \mathcal{D}^\alpha \mathcal{D}_\alpha$. Zeigen Sie mit Hilfe von (2), daß

$$\mathcal{D}^2 \bar{\mathcal{D}}^2 \bar{\phi} = -16 \,\Box\, \bar{\phi}\,. \tag{11}$$

Beachten Sie dabei, daß $\bar{\mathcal{D}}^2 = \bar{\mathcal{D}}_{\dot\alpha} \bar{\mathcal{D}}^{\dot\alpha}$. Warum ist die eine Wirkung mit einer Lagrangedichte

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} \mathcal{D}^2 L + \text{h.c.} \tag{12}$$

für ein beliebiges skalares chirales Superfeld L supersymmetrisch? Drücken Sie die Lagrangedichte $\mathcal{L}$

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} \mathcal{D}^2 \left[-\frac{1}{8} \bar{\mathcal{D}}^2 \bar{\phi} \phi + g(\phi) \right], \qquad \text{mit} \qquad g(\phi) = \gamma + \lambda \phi + \frac{1}{2} m \phi^2 + \frac{1}{6} \kappa \phi^3\,.$$

in den Komponentenfeldern ϕ, χ, F aus. Entwickeln Sie das chirale Superfeld $\phi(x, \theta, \bar\theta)$ in Ordnungen von $\theta, \bar\theta$. Benutzen Sie dazu wie in der Vorlesung die Relation (9) und die explizite Darstellung (5) vor der Entwicklung, um die Chiralität sicherzustellen.

3. Eichmultiplett

Die Superalgebra in der Anwesenheit einer Eichsymmetrie hat die Form

$$\begin{aligned}
\{\mathcal{D}_\alpha\,,\, \bar{\mathcal{D}}_{\dot\alpha}\} &= -2i \sigma^a_{\alpha\dot\alpha} \mathcal{D}_a\,, \\
\{\mathcal{D}_\alpha\,,\, \mathcal{D}_\beta\} &= 0\,, \\
[\mathcal{D}_\alpha\,,\, \mathcal{D}^a] &= i(\sigma^a \bar\lambda)_\alpha\,, \\
[\bar{\mathcal{D}}_{\dot\alpha}\,,\, \mathcal{D}^a] &= -i(\lambda \sigma^a)_{\dot\alpha}\,, \\
[\mathcal{D}_b\,,\, \mathcal{D}_b] &= F_{ab}\,, \\
[\delta_I\,,\, \mathcal{D}_A] &= 0\,, \\
[\delta_I\,,\, \delta_J] &= C_{IJ}{}^K \delta_K\,.
\end{aligned} \tag{13}$$

Zeigen Sie

$$\{\bar{\mathcal{D}}_{\dot\alpha}\,,\, [\bar{\mathcal{D}}_{\dot\beta}\,,\, \mathcal{D}_a]\} + \{\bar{\mathcal{D}}_{\dot\beta}\,,\, [\bar{\mathcal{D}}_{\dot\alpha}\,,\, \mathcal{D}_a]\} + [\mathcal{D}_a\,,\, \{\bar{\mathcal{D}}_{\dot\alpha}\,,\, \bar{\mathcal{D}}_{\dot\beta}\}] = 0\,, \qquad \text{daß} \qquad \bar{\mathcal{D}}_{\dot\alpha} \lambda_\alpha = 0\,, \tag{14}$$

und mit

$$\{\mathcal{D}_\alpha\,,\, [\bar{\mathcal{D}}_{\dot\alpha}\,,\, \mathcal{D}_a]\} + \{\bar{\mathcal{D}}_{\dot\alpha}\,,\, [\mathcal{D}_\alpha\,,\, \mathcal{D}_a]\} + [\mathcal{D}_a\,,\, \{\bar{\mathcal{D}}_{\dot\alpha}\,,\, \mathcal{D}_\alpha\}] = 0\,, \tag{15}$$

daß

$$\mathcal{D}_\alpha \lambda^\beta = \sigma^{ab}{}_\alpha{}^\beta F_{ab} - i \delta_\alpha^\beta D\,, \tag{16}$$

mit $D^I = \frac{i}{2} \mathcal{D}^\alpha \lambda^I_\alpha = (D^I)^*$. Benutzen Sie die Algebra (13), um die Lagrangedichte

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} \mathcal{D}^2 L + \text{h.c.} + \sum_{U(1)} \mu_I^2 D^I$$

mit

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} \mathcal{D}^2 \left[-\frac{1}{8} \bar{\mathcal{D}}^2 \bar{\phi} \phi + g(\phi) - \frac{1}{4g^2} \lambda^I \lambda^I \right] \tag{17}$$

in den Komponentenfeldern zu schreiben. Welcher Term in (17) beinhaltet die Yang-Mills Wirkung? Das volle Ergebnis ist

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} \;=\; & -\frac{1}{4g^2} F^I_{ab} F^{abI} - \frac{i}{2g^2} \lambda^I \sigma^a \overleftrightarrow{\mathcal{D}}_a \bar\lambda^I + \frac{1}{2g^2} D^I D^I + \mathcal{D}^a \bar\phi \mathcal{D}_a \phi - \frac{i}{2} \chi \sigma^a \overleftrightarrow{D}_a \bar\chi + \bar{F} F \\
& + \sqrt{2} \left(\bar\phi \lambda \chi - \chi \bar\lambda \phi \right) + i \bar\phi\, D\, \phi + \mu_I^2 D^I + F^i g_i + \bar{F}^{\bar i} g^*_{\bar i} - \frac{1}{2} \xi^i \chi^j g_{ij} - \frac{1}{2} \xi^{\bar i} \chi^{\bar j} g^*_{\bar i \bar j} - \Box\, \bar\phi \phi\,.
\end{aligned}$$

Lösungen

1. Superraum

Die Algebra (2) sagt aus, daß alle Erzeugenden $\mathcal{D}$ mit Supersymmetrietransformationen vertauschen.

$$[\xi^\alpha Q_\alpha + \bar{\xi}_{\dot\alpha}\bar{Q}^{\dot\alpha}\,,\,\mathcal{D}] = 0\,, \tag{18}$$

Eine Darstellung der $\mathcal{D}$'s ist invariant unter Supersymmetrietransformationen. Die Algebra (18) lässt sich mit (3) als

$$[\xi^\alpha \mathcal{D}_\alpha + \bar{\xi}_{\dot\alpha}\bar{\mathcal{D}}^{\dot\alpha} + \xi^a\mathcal{D}_a\,,\,\mathcal{D}] = 0 \tag{19}$$

schreiben. Wir werten (19) für $\mathcal{D} = \bar{\mathcal{D}}_{\dot\alpha}$ aus. Es folgt

$$[\xi^\alpha\mathcal{D}_\alpha + \xi^a\mathcal{D}_a\,,\,\bar{\mathcal{D}}_\alpha] = \xi^\alpha\{\mathcal{D}_\alpha\,,\,\bar{\mathcal{D}}_\alpha\} + [\xi^a\,,\,\bar{\mathcal{D}}_{\dot\alpha}] = -2i\xi^\alpha\sigma^a_{\alpha\dot\alpha}\mathcal{D}_a - (\bar{\mathcal{D}}_{\dot\alpha}\xi^a)\mathcal{D}_a = 0\,. \tag{20}$$

In (20) haben wir benutzt, daß $\{\xi^\alpha\,,\,\bar{\mathcal{D}}_\alpha\} = 0 = [\mathcal{D}_a\,,\,\mathcal{D}]$. Mit (20) und der analogen Relation für $[\xi^\alpha\mathcal{D}_\alpha + \xi^a\mathcal{D}_a\,,\,\mathcal{D}_\alpha]$ sind die Relationen (4) gezeigt.

Die Relation (3) ist mit (5) und (7) erüllt. Wir zeigen exemplarisch $\{\mathcal{D}_\alpha\,,\,\bar{\mathcal{D}}_{\dot\alpha}\} = -2i\sigma^a_{\alpha\dot\alpha}$. Dazu benötigen wir die letzte Relation in (8). Diese folgt mit

$$\bar\partial_{\dot\alpha}\bar\theta^{\dot\beta} = \bar\partial^{\dot\gamma}\epsilon_{\dot\alpha\dot\gamma}\epsilon^{\dot\beta\dot\delta}\bar\theta_{\dot\delta} = \epsilon_{\dot\alpha\dot\gamma}\epsilon^{\dot\beta\dot\delta}\delta^{\dot\gamma}_{\dot\delta} = \epsilon_{\dot\alpha\dot\gamma}\epsilon^{\dot\beta\dot\gamma} = -\epsilon_{\dot\alpha\dot\gamma}\epsilon^{\dot\gamma\dot\beta} = -\delta^{\dot\beta}_{\dot\alpha}\,.$$

Damit gilt

$$\{\mathcal{D}_\alpha\,,\,\bar{\mathcal{D}}_{\dot\alpha}\} = i\left(-\partial_\alpha\theta^\beta\,\sigma^a_{\beta\dot\alpha} + \bar\partial_{\dot\alpha}\,\sigma^a_{\alpha\dot\beta}\sigma^a_{\alpha\dot\beta}\right)\mathcal{D}_a = -2i\sigma^a_{\alpha\dot\alpha}\mathcal{D}_a\,.$$

2. Chirales Multiplett

Wir zeigen (11) durch sukzessives Verwenden der Algebra (2):

$$D_\alpha\bar{D}_{\dot\alpha} = \{D_\alpha\,,\,\bar{D}_{\dot\alpha}\} - \bar{D}_{\dot\alpha}D_\alpha = -2i\sigma^a_{\alpha\dot\alpha}\mathcal{D}_a - \bar{D}_{\dot\alpha}D_\alpha\,. \tag{21}$$

Diese Identiät ermöglicht es uns, alle $\mathcal{D}$'s nach rechts zu bringen. Da $\bar\phi$ anti-chiral ist, verschwindet $\mathcal{D}_\alpha\bar\phi$. Es gilt

$$\mathcal{D}^2\bar{\mathcal{D}}^2\bar\phi = \mathcal{D}^\alpha\{\mathcal{D}_\alpha\,,\,\bar{\mathcal{D}}_{\dot\alpha}\}\bar{\mathcal{D}}^{\dot\alpha}\bar\phi - \mathcal{D}^\alpha\bar{\mathcal{D}}_{\dot\alpha}\mathcal{D}_\alpha\bar{\mathcal{D}}^{\dot\alpha}\bar\phi = \{\mathcal{D}_\alpha\,,\,\bar{\mathcal{D}}_{\dot\alpha}\}\mathcal{D}^\alpha\bar{\mathcal{D}}^{\dot\alpha}\bar\phi - \mathcal{D}^\alpha\bar{\mathcal{D}}_{\dot\alpha}\{\mathcal{D}_\alpha\,,\,\bar{\mathcal{D}}^{\dot\alpha}\}\bar\phi\,. \tag{22}$$

In (22) wurde die Anti-Chiralität von $\bar\phi$ verwendet (2ter Term auf der rechten Seite) und die Tatsache, dass der Antikommutator $\{\mathcal{D}_\alpha, \bar{\mathcal{D}}_{\dot\alpha}\}$ nur von $\mathcal{D}_a$ abhängt, welches mit allen $\mathcal{D}$'s vertauscht. Damit kann auch $\mathcal{D}^\alpha\bar{\mathcal{D}}_{\dot\alpha}$ im letzten Term auf der rechten Seite von (22) mit dem Antikommutator vertauscht werden. Außerdem verwenden wir nochmals die Anti-Chiralität von $\bar\phi$: $\mathcal{D}^\alpha\bar{\mathcal{D}}_{\dot\alpha}\bar\phi = \{\mathcal{D}^\alpha\,,\,\bar{\mathcal{D}}_{\dot\alpha}\}\bar\phi$. Dann folgt aus (22), daß

$$\mathcal{D}^2\bar{\mathcal{D}}^2\bar\phi = 2\{\mathcal{D}_\alpha\,,\,\bar{\mathcal{D}}_{\dot\alpha}\}\{\mathcal{D}^\alpha\,,\,\bar{\mathcal{D}}^{\dot\alpha}\}\bar\phi = -8\sigma^a{}_{\alpha\dot\alpha}\sigma^{b\alpha\dot\alpha}D_aD_b\bar\phi = -16D^aD_a\bar\phi\,, \tag{23}$$

mit $\bar\sigma^{\dot\alpha\alpha} = \sigma^{\alpha\dot\alpha}$, $\mathrm{tr}\,\sigma^a\bar\sigma^b = -2\eta^{ab}$ und $\mathcal{T}_1{}^\alpha{}_{\dot\alpha}\mathcal{T}_{2\alpha}{}^{\dot\alpha} = -\mathcal{T}_{1\alpha\dot\alpha}\mathcal{T}_2{}^{\alpha\dot\alpha}$ für beliebige Tensoren $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$.

Die Supersymmetrietransformation der Lagrangedichte (12) ist eine totale Ableitung $\sim D_a\chi_L$, deren Raumzeitintegral verschwindet (in Abwesenheit von Randtermen). Dies wurde in der

Vorlesung gezeigt. In der Darstellung (3) der Supersymmetrietransformation folgt das sofort mit $\mathcal{D}_\beta \mathcal{D}^2 = 0$ und

$$\bar{\mathcal{D}}_{\dot\alpha} \mathcal{D}^2 L = \{\bar{\mathcal{D}}_{\dot\alpha}\, ,\, \mathcal{D}^\alpha\} \mathcal{D}_\alpha L - \{\bar{\mathcal{D}}_{\dot\alpha}\, , \mathcal{D}_\alpha\} \bar{\mathcal{D}}^\alpha L\,.$$

Mit $\mathcal{D}_\alpha L = \sqrt{2}\chi_L$ folgt die Behauptung.

Die Terme aus dem Superpotential folgen sofort mit (10). Der Kählerpotentialterm lässt sich als

$$\begin{aligned} \frac{1}{32}\mathcal{D}^2\bar{\mathcal{D}}^2\bar{\phi}\phi &= \frac{1}{32}(\mathcal{D}^2\bar{\mathcal{D}}^2\bar{\phi})\phi + \frac{1}{32}(\bar{\mathcal{D}}^2\bar{\phi})\mathcal{D}^2\phi + \frac{1}{32}(\mathcal{D}^\alpha\bar{\mathcal{D}}^2\bar{\phi})D_\alpha\phi - \frac{1}{32}(\mathcal{D}_\alpha\bar{\mathcal{D}}^2\bar{\phi})\mathcal{D}^\alpha\phi \\ &= \frac{1}{32}(\mathcal{D}^2\bar{\mathcal{D}}^2\bar{\phi})\phi + \frac{1}{32}(\bar{\mathcal{D}}^2\bar{\phi})\mathcal{D}^2\phi + \frac{1}{16}(\mathcal{D}^\alpha\bar{\mathcal{D}}^2\bar{\phi})\mathcal{D}_\alpha\phi \end{aligned} \tag{24}$$

schreiben. Mit

$$\mathcal{D}_\alpha\bar{\mathcal{D}}^2\bar{\phi} = \{\mathcal{D}_\alpha\, ,\, \bar{\mathcal{D}}_{\dot\alpha}\}\bar{\mathcal{D}}^{\dot\alpha}\bar{\phi} - \{\mathcal{D}_\alpha\, , \bar{\mathcal{D}}^{\dot\alpha}\}\bar{\mathcal{D}}_{\dot\alpha}\bar{\phi} = -4\sqrt{2}i\sigma^a_{\alpha\dot\alpha}\mathcal{D}_a\bar{\chi}^{\dot\alpha}$$

sind alle Terme der Lagrangedichte in Komponentenschreibweise bekannt.

3. Eichmultiplett

Wir ersetzen die inneren (Anti-) Kommutatoren in (14) mit (13) und es folgt die Bianchiidentität

$$\{\bar{\mathcal{D}}_{\dot\alpha}\, , (\lambda\sigma^a)_{\dot\beta}\} + \{\bar{\mathcal{D}}_{\dot\beta}\, , (\lambda\sigma^a)_{\dot\alpha}\} = 0\,.$$

Damit muß $\bar{\mathcal{D}}_{\dot\alpha}\lambda_\alpha = 0$ gelten. Analog folgt mit (13) und (15) die Bianchiidentität

$$\{\mathcal{D}_\alpha\, ,\, (\lambda\sigma_a)_{\dot\alpha}\} - \{\bar{\mathcal{D}}_{\dot\alpha}\, ,\, (\sigma_a\bar{\lambda})_\alpha\} = 2[\mathcal{D}_a\, ,\, \sigma^b_{\alpha\dot\alpha}\mathcal{D}_b] = 2\sigma^b_{\alpha\dot\alpha}F_{ab}\,.$$

Mit Einsetzen von (16) in die Bianchiidentiät folgt sofort $D^* = -D$ und damit $D^I = (D^I)^*$ wegen $\delta_I^* = -\delta_I$. Letzteres brauchen wir für die Eichinvarianz von $\bar{\phi}\phi$. Die Equivalenz der F_{ab}-Terme folgt mit

$$\bar{\sigma}^a\sigma^b\bar{\sigma}^c + \bar{\sigma}^c\sigma^b\bar{\sigma}^a = 2(\eta^{ac}\bar{\sigma}^b - \eta^{bc}\bar{\sigma}^a - \eta^{ab}\bar{\sigma}^c)\,.$$

Die Supersymmetrietransformation von D^I schließt auf $D_a\lambda, D_a\bar{\lambda}$, womit das Multiplett komplett ist.

Die Lagrangedichte der Yang-Mills Wirkung ist im letzten Term der Lagrangedichte (17) enthalten $(-D^\alpha\lambda^I D_\alpha\lambda^I)$. Die volle Lagrangedichte folgt analog zur Aufgabe 2. Bitte beachten Sie, daß $\mathcal{D}_a$ nicht mehr mit $\mathcal{D}_\alpha, \bar{\mathcal{D}}_{\dot\alpha}$ vertauscht.