# 4.4 Spezielle Relativitätstheorie

## Maxwell-Gleichungen

Herleitung und
→ Formulierung ohne Bezug auf ein
spezielles Koordinatensystem!

S. 62 ff
Induktionsgesetz
→ Annahme der
Invarianz der
Grundgl. gegenüber
Verschiebung des
Koordsystems mit
konst. $\vec{v}$.

⇓

Formulierung in vektoriellen Größen

⇒ Gesetze unabhängig von der
Ausrichtung des Koordinatensystems,

⇒ Physikal. Gesetze invariant gegenüber
Drehungen des Koordinatensystems
(Raum ist homogen und isotrop)

## Bezugssysteme, die sich (gleichförmig) zueinander bewegen?

Formulierung der physik. Gesetze, so dass
diese invariant gegenüber Transformationen
zwischen Inertialsystemen sind.

**klass. Mechanik:** Galilei-Transformation

$$\boxed{\begin{aligned} t' &= t + \tau \\ x_i' &= -v_i t + R_{ij} x_j + a_i \end{aligned}} \qquad (4.51)$$

## ~~5.2~~ Versuch, die absolute Bewegung im Raum zu messen

Maxwell-Gleichungen: sind nicht invariant unter Galilei-Transformationen

(Übung: zeige dies direkt mit den Maxwell-Gleichungen)

Hier: folgende Argumentation

Lösung der Maxwell-Gleichungen im Vakuum ohne äußere Quellen

$\Rightarrow$ elektrom. Wellen

Ebene Wellen: charakterisiert durch Exponentialfaktor

$$\boxed{\begin{gathered} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)} \\ c\,|\vec{k}| = \omega \end{gathered}} \qquad (4.52)$$

Galilei-Transform auf gleichförmig bewegtes Bezugssystem

$$t' = t$$
$$\vec{x}' = \vec{x} - \vec{v}\cdot t \qquad (4.53)$$

$$\boxed{\begin{gathered} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}' + \vec{k}\cdot\vec{v}\,t' - \omega t')} = e^{i(\vec{k}'\vec{x}' - \omega' t')} \\ \vec{k}' = \vec{k} \quad , \quad \omega' = \omega - \vec{k}\cdot\vec{v} \underset{\text{(im allgemeinen)}}{\neq} c\,|\vec{k}'| \end{gathered}}$$

Eine solche Welle ist keine Lösung der Maxwell-Gleichungen

Forderung: Invarianz der Maxwell Gleichungen

↓

'erlaubte' Koordinatentransf.

Lorentztransformationen

⇑

folgen aus den Postulaten der

speziellen Relativitätstheorie (SRT)

Postulat 1: (Formulierung nach A. Einstein, 1905)

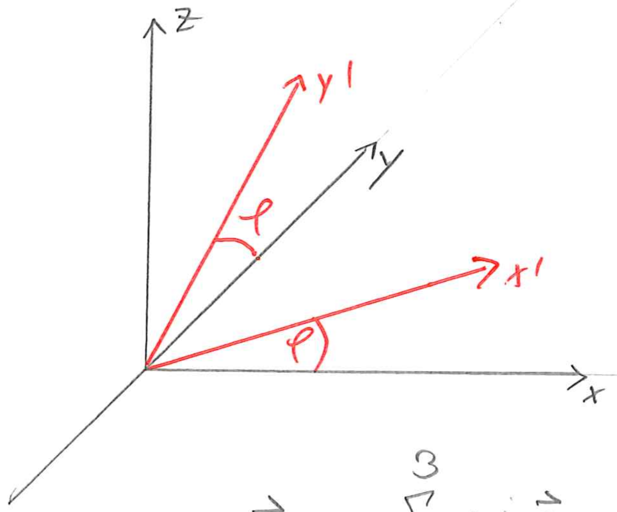
„Die Gesetze, nach denen sich die Zustände der physikalischen Systeme ändern sind unabhängig davon, auf welches von zwei relativ zueinander in gleichförmiger Translationsbewegung befindlichen Koordinatensystemen diese Zustandsänderungen bezogen werden."

(spezielles Relativitätsprinzip)

Postulat 2:

Die Lichtgeschw. ist unabhängig von der Geschwindigkeit der Lichtquelle.

Invarianz der physikalischen Gesetze gegenüber einer Drehung des Koordinatensystems (Isotropie des Raumes): $\Rightarrow$ unabhängig von der Ausrichtung des Koordinatensys.




$$x' = x\cos\varphi + y\sin\varphi$$
$$y' = -x\sin\varphi + y\cos\varphi$$
$$z' = z$$

gedrehte Basisvektoren

$$\vec{r} = \sum_{i=1}^{3} x_i\,\vec{e}_i = x_i\,\vec{e}_i = x'_i\,\vec{e}\,'_i$$

Einsteinsche Summenkonvention

mit $\quad x_1 = x \;,\; x_2 = y \;,\; x_3 = z$

Für das Koordinatentupel $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ schreibt man auch $\underline{x}$

und für $(x_1, x_2, x_3) = \underline{x}^t$ (transponiertes Koordinatentupel).

Drehung des Koordinatensystems:

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

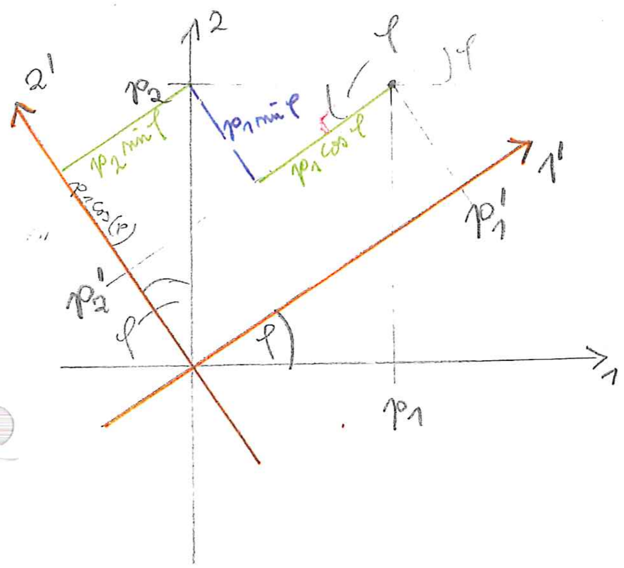
(4.54)

| $x'_i = R_{ij}\,x_j$ | $\underline{x}' = \underline{R}\,\underline{x}$ |
|---|---|

## 2. Drehung (Rotation)

Beispiel: Drehung um die 3-Richtung mit Winkel $\varphi$

CD 9.1.4
Bild 9.5




$$p_1' = p_1 \cos\varphi + p_2 \sin\varphi$$

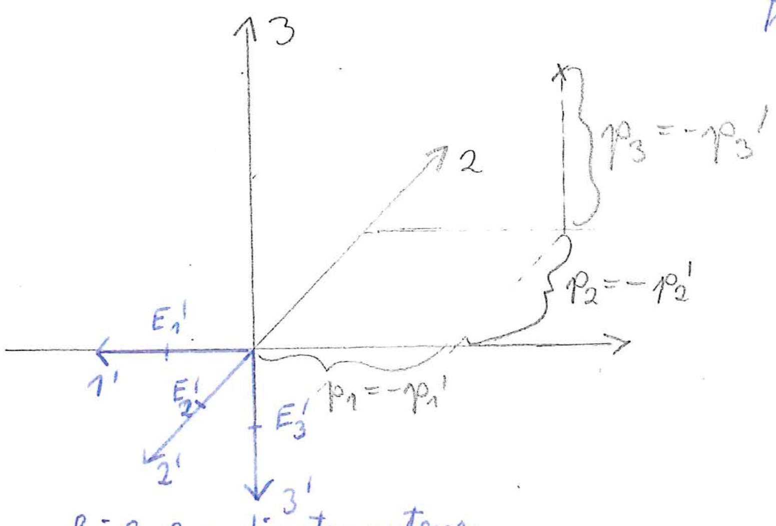
$$p_2' = -p_1 \sin\varphi + p_2 \cos\varphi$$

$$p_3' = p_3$$

$$\begin{pmatrix} p_1' \\ p_2' \\ p_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Aufg. 9.3

## 3. Spiegelungen, z.B. am Ursprung (Parität / Paritätstransformation)




Linkskoordinatensystem

$$\{p_1', p_2', p_3'\} = \{-p_1, -p_2, -p_3\}$$

Alle anderen Spiegelungen lassen sich aus dieser und geeigneten Drehungen zusammensetzen.

Länge von Vektoren, Abstand von Punkten

= invariant gegenüber Drehung

$\Rightarrow$ Einführung einer Metrik und eines Skalarproduktes zwischen Vektoren

$$\vec{v}\cdot\vec{w} = \left(\sum_{i=1}^{3} v_i\,\vec{e}_i\right)\left(\sum_{j=1}^{3} w_j\,\vec{e}_j\right) = \sum_{i,j} v_i\,w_j\,\underbrace{\vec{e}_i\cdot\vec{e}_j}_{=\delta_{ij}}$$

$$= \underline{v}^t\cdot\underline{w} = (v_1, v_2, v_3)\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$$

$$= v_i\,\delta_{ij}\,w_j$$

$$= (v_1, v_2, v_3)\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}}_{\text{Metrik}}\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \qquad (4.55)$$

Abstand zwischen Punkten $\underline{x}, \underline{y}$

$$\Delta s = (\underline{x}-\underline{y})^t(\underline{x}-\underline{y})$$

Drehung des Koordinatensystems: $\underline{x}' = \underline{\underline{R}}\,\underline{x}$

$\underline{y}' = \underline{\underline{R}}\,\underline{y}$

$$\Delta s' = (\underline{x}'-\underline{y}')^t(\underline{x}'-\underline{y}')$$

$$= (\underline{x}-\underline{y})\,\underline{\underline{R}}^t\,\underline{\underline{R}}\,(\underline{x}-\underline{y}) \overset{!}{=} (\underline{x}-\underline{y})^t(\underline{x}-\underline{y}) = \Delta s$$

$$\Rightarrow \boxed{\underline{\underline{R}}^t\,\underline{\underline{R}} = \mathbb{1}} \qquad (4.56)$$

$\Rightarrow$ Übung: für obige Drehmatrix nachrechnen

orthogonale Matrizen (Gruppe $O(3)$)

$SO(3)$ wenn zusätzlich $\det(\underline{\underline{R}}) = 1$

Betrachten wir nun die Poissongleichung der Elektrostatik:

$$\Delta \phi(\vec{r}) = -4\pi \varrho(\vec{r})$$

$$\vec{r} = x_i \vec{e}_i$$

$$\phi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \phi(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}$$
$$= \phi(\underline{x})$$

analog für $\varrho(\vec{r})$

Drehung des Koordinatensystems

$$\boxed{\begin{aligned} \underline{x}' &= \underline{R}\,\underline{x} \\ x'_i &= R_{ij} x_j \end{aligned}} \quad \overset{R^t R = \mathbb{1}}{\Longrightarrow} \quad \boxed{\underline{x} = \underline{R}^t \underline{x}'} \qquad (4.57)$$

$\phi \to \phi'$
$\varrho \to \varrho'$
$\Rightarrow$

$$\phi'(x'_1(\underline{x}), x'_2(\underline{x}), x'_3(\underline{x})) = \phi(x_1, x_2, x_3)$$
$$\varrho'(x'_1(\underline{x}), x'_2(\underline{x}), x'_3(\underline{x})) = \varrho(x_1, x_2, x_3)$$

Was passiert mit $\Delta \to \Delta'$ ?

Mit der Kettenregel erhält man (4.58)

$$\frac{\partial \phi'}{\partial x_i} = \frac{\partial \phi'}{\partial x'_j} \frac{\partial x'_j}{\partial x_i} = \Big( \underbrace{R_{ji}}_{\text{transponierte Matrix}} \frac{\partial}{\partial x'_j} \Big) \phi'$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{\partial}{\partial x_i} = R_{ji} \frac{\partial}{\partial x'_j}} \quad \boxed{\underline{\nabla} = \underline{R}^t \underline{\nabla}'}$$

(4.59)

und da $\underline{R}^t \underline{R} = \mathbb{1}$

ergibt sich für

$$\Delta = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}\right) \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix}$$

$$= \delta_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j}$$

$$= \underline{\nabla}^t \cdot \underline{\nabla}$$

$$\Delta' =$$

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{\nabla} = \left(\underline{R}^t \underline{\nabla}'\right)^t \left(\underline{R}^t \underline{\nabla}'\right)$$

$$= \underline{\nabla}'^t \underbrace{\left(\underline{R}\,\underline{R}^t\right)}_{=\mathbb{1}} \underline{\nabla}' = \underline{\nabla}'^t \cdot \underline{\nabla}' = \Delta' \qquad (4.60)$$

**Also:** Poissongleichung ist invariant gegenüber Drehungen des Koordinatensystems.

$$\boxed{\Delta' \phi'(\underline{x}') = -4\pi \rho'(\underline{x})}$$

$$\Delta' \phi'(\underline{x}'(\underline{x})) \left( = \Delta \phi(x_1, x_2, x_3) \right)$$
$$= -4\pi \rho'(\underline{x}')$$

## Spezielle Relativitätstheorie

⇒ suche nach Transformationen, die die Postulate der SRT erfüllen, insbesondere

elektromagn. Wellen breiten sich in allen Inertialsystemen mit Lichtgeschw. aus:

$$\omega = c\sqrt{\vec{k}^2} \quad (\text{Gl. } 4.50)$$

↗

Folge der Wellengleichung mit dem Diff.-op.

$$\boxed{\Box = \frac{\partial^2}{\partial(ct)^2} - \vec{\nabla}^2} \quad (4.61)$$

Suche nach Transformationen, die $\Box$ oder $\omega^2 = c^2\vec{k}^2$ invariant lassen.

↓

(4.61) legt nahe, ein 4-dim. Koordinatensystem einzuführen. Wir definieren den Vierervektor

$$(x^\mu) = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^0 \\ \vec{x} \end{pmatrix} \quad \text{mit } x^0 = ct \quad (4.62)$$

$$\mu = 0,1,2,3 \qquad \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Man definiert das Skalarprodukt

$$\underline{x}^t \cdot \underline{x} = x^{0\,2} - \vec{x}^{\,2} \qquad (4.63)$$

$\uparrow$

relatives Minus

Mit dem

metrischen Tensor

$$\underline{\eta} = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix} \qquad (4.64)$$

$$\underline{x}^t \cdot \underline{x} = \underline{x}^t \, \underline{\eta} \, \underline{x}$$

$$= x^\mu \underbrace{\eta_{\mu\nu} x^\nu}_{=: x_\mu} =: x^\mu x_\mu = x_\mu x^\mu$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} x^\mu = \begin{pmatrix} x^0 \\ \vec{x} \end{pmatrix} & (\text{kontravarianter Vektor}) \\ x_\mu := \eta_{\mu\nu} x^\nu = (x^0, -\vec{x}), & \text{kovarianter Vektor} \end{array}}$$

$$(\eta_{\alpha\gamma}\, \eta^{\gamma\beta}) = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\eta}^t \underline{\eta} = \mathbb{1}$$

$$\eta_{\alpha\gamma}\, \eta^{\gamma\beta} = \delta_\alpha{}^\beta \qquad (4.65)$$

Gesucht:

Relationen zwischen Inertialsystemen $K \to K'$

$$\boxed{x'^{\alpha} = f^{\alpha}(x^{\beta})}$$

K' soll wieder ein Inertialsystem sein

$\Rightarrow$ geradlinig-gleichförmige Bewegung eines Massenpunktes in Bezug auf K muß in K' ebenfalls geradlinig-gleichmäßig sein

$\Rightarrow$ die Transformation f muß Geraden in Geraden überführen.

$\Rightarrow$ f = affine Transformation

$$\boxed{x'^{\alpha} = \Lambda^{\alpha}{}_{\beta}\, x^{\beta} + a^{\alpha}} \qquad (4.66)$$

Wir suchen

Transformationen, die den verallgemeinerten Abstand zweier Weltpunkte invariant lassen:

$$(x'-y')^2 = (x'^\alpha - y'^\alpha)\,\eta_{\alpha\beta}\,(x'^\beta - y'^\beta)$$

$$= (x'^\alpha - y'^\alpha)(x'_\alpha - y'_\alpha)$$

$$= \Lambda^\alpha{}_\gamma (x^\gamma - y^\gamma)\,\eta_{\alpha\beta}\,\Lambda^\beta{}_\delta\,(x^\delta - y^\delta)$$

$$= (x^\gamma - y^\gamma)\,\underbrace{\Lambda^\alpha{}_\gamma\,\Lambda^\beta{}_\delta\,\eta_{\alpha\beta}}_{\overset{!}{=}\,\eta_{\gamma\delta}}\,(x^\delta - y^\delta)$$

Forderung!

$$\doteq (x-y)^2 = (x^\gamma - y^\gamma)\,\eta_{\gamma\delta}\,(x^\delta - y^\delta)$$

Bedingung an $\underline{\underline{\Lambda}}$, damit verallg. Abstand invariant!

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} \underline{\underline{\Lambda}}^t\,\underline{\underline{\eta}}\,\underline{\underline{\Lambda}} &= \underline{\underline{\eta}} \\ \eta_{\alpha\beta}\,\Lambda^\alpha{}_\gamma\,\Lambda^\beta{}_\delta &= \eta_{\gamma\delta} \end{aligned}} \qquad (4.67)$$

verallgemeinerte Orthogonalitätsrelation

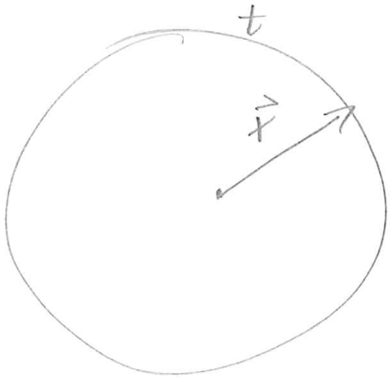
Lichtgeschwindigkeit im transformierten System?

<u>Beobachter I</u>:

Lichtblitz zum Zeitpkt. $t=0$ vom räumlichen Koordinatenursprung

$\Downarrow$

Kugelwelle, die sich nach allen Richtungen mit $c$ ausbreitet




$$|\vec{r}| = ct = x^0$$

$$(x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 = 0$$

$$x^0 > 0$$

Licht-Kugelwelle = 3.dim Kegel im Minkowski-Raum

$$x^\alpha x^\beta \eta_{\alpha\beta} = 0$$

<u>Beobachter II</u> bewege sich gleichförmig und geradlinig gegenüber System I

I und II sollen dasselbe Punktereignis $O = O'$ als Anfangspkt. ihrer Raum- und Zeitzählung wählen

$$\Longrightarrow \quad x'^\alpha = \Lambda^\alpha{}_\beta \, x^\beta$$

$$x'^{\alpha} x'^{\beta} \eta_{\alpha\beta} = \Lambda^{\alpha}{}_{\mu} x^{\mu} \Lambda^{\beta}{}_{\nu} x^{\nu} \eta_{\alpha\beta}$$

$$= \underbrace{\eta_{\alpha\beta} \Lambda^{\alpha}{}_{\mu} \Lambda^{\beta}{}_{\nu}}_{= \eta_{\mu\nu}} x^{\mu} x^{\nu}$$

$$= \eta_{\mu\nu} x^{\mu} x^{\nu} = 0$$

$\Rightarrow$ Licht-Kugelwelle breitet sich auch im System II mit Lichtgeschw. $c$ aus.