1.2 Skalare Felder & Vektorfelder

Skalare Felder: Temperatur $T(x,y,z)$,

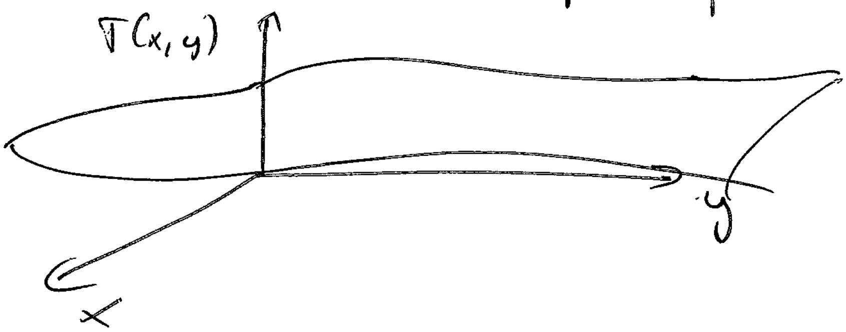
Druck $p(x,y,z)$

Dichte $n(x,y,z)$

Pot. einer konserv. Kraft $V(x,y,z)$

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} V = -\begin{pmatrix} \frac{\partial V}{\partial x} \\ \frac{\partial V}{\partial y} \\ \frac{\partial V}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (1.3)$$

z. B. Coulombpot.: $q\Phi(x,y,z)$



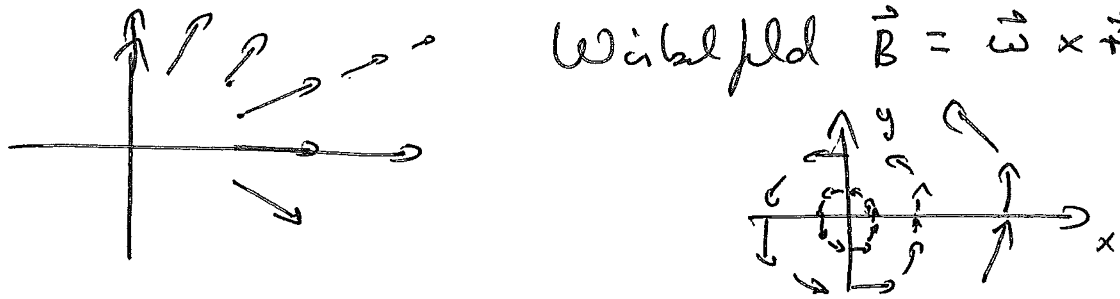
oder mit Niveaulinien

Vektorfeld: $\vec{E}$ - $\vec{B}$ Felder

Kraft $\vec{F}$, konservat. Kraft $\vec{F} = -\vec{\nabla} V$

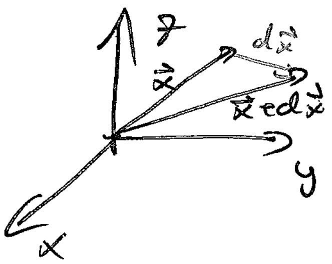
$V = \alpha / r$

Wirbelfeld $\vec{B} = \vec{\omega} \times \vec{r}$



Auch Differenzen und Summen von Skalarpot. sind Skalarpotentiale, des weiteren $(x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z)$

$$V(\underbrace{\vec{x} + d\vec{x}}_{\text{infinitesimal}}) - V(\vec{x}) = 0 + \left.\frac{\partial V}{\partial x}\right|_{y,z} dx + \left.\frac{\partial V}{\partial y}\right|_{x,z} dy + \left.\frac{\partial V}{\partial z}\right|_{x,y} dz + \mathcal{O}(dx_i\, dx_j)$$



$$= \vec{\nabla} V \cdot d\vec{x} \qquad (1.4)$$

mit $\vec{\nabla} V = \left(\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z}\right)$, $\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$

$\vec{\nabla}$ ist ein Vektoroperator, $\vec{\nabla} V$ ist der <u>Gradient</u> eines Skalarfeldes.

$\vec{\nabla}$ kann auch auf ein Vektorfeld angewendet werden,

$$\vec{\nabla} \vec{E} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot (E_1, E_2, E_3)$$

$$= \frac{\partial E_1}{\partial x} + \frac{\partial E_2}{\partial y} + \frac{\partial E_3}{\partial z}, \qquad (1.5)$$

den Skalar $\vec{\nabla} \vec{E}$ nennt man <u>Divergenz</u> von $\vec{E}$.

Das Kreuzprodukt von $\vec{\nabla}$ mit einem Vektorfeld

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{e}_x & \hat{e}_y & \hat{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z}\right)\hat{e}_x + \left(\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x}\right)\hat{e}_y + \left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y}\right)\hat{e}_z \qquad (1.6)$$

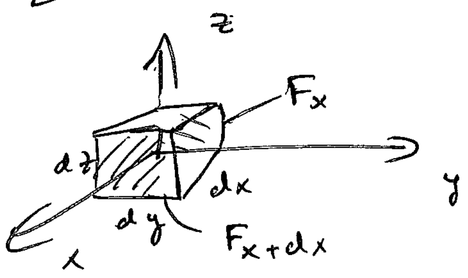
nennt man Rotation.

Bedeutung von Divergenz & Rotation:

(i) Divergenz: Sei $\vec{j}$ eine Stromdichte, z.B. von elektrischen Ladungen oder von Wasser (inkompressibel).

$$j = \left[\text{Ladung} / \text{Fläche} \cdot \text{Zeit}\right]$$

Betrachte



Der Strom durch die Fläche F_x ist durch

$$\underbrace{\vec{j}(\vec{x})\cdot\hat{e}_x\, dy\, dz}_{\vec{F}_x} = j_x(\vec{x})\, dy\, dx \qquad (1.7)$$

gegeben.

(einströmend)

Der Strom durch die Fläche F_{x+dx} ist durch

$$\vec{j}(\vec{x}+\hat{e}_x dx)\,\underbrace{\hat{e}_x\, dy\, dz}_{\vec{F}_{x+dx}} = j_x(\vec{x}+\hat{e}_x dx)\, dy\, dz \qquad (1.8)$$

Der Abfluß durch die Flächen F_x, F_{x+dx} ist durch

$$\left(\vec{j}(\vec{x}+dx\,\hat{e}_x) - \vec{j}(\vec{x})\right)\hat{e}_x\, dy\, dz$$

$$= \frac{\partial j_x}{\partial x}\, dx\, dy\, dz \qquad (1.9)$$

gegeben, mit Gln. (1.8), (1.9). Analog folgt der Zufluß durch $F_y, F_{y+dy}; F_z, F_{z+dz}$. Der totale Abfluß ist

$$\left(\frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z}\right) dx\, dy\, dz = \vec{\nabla}\vec{j}\cdot dx\, dy\, dz \qquad (1.10)$$

Gaußscher Satz:

Insgesamt haben wir für die infinitesimale Box B (Bild Seite 5) gezeigt, daß

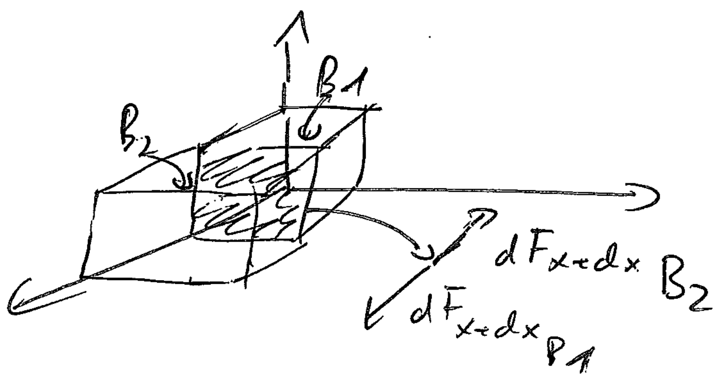
$$\int_{\partial B} \vec{j} \cdot d\vec{F} = \int_B \vec{\nabla} \vec{j} \, dV \qquad (1.11)$$

$dV = dx\,dy\,dz$

∂B: Randfläche der Box

dF: nach außen gerichteter (orientierter) Flächenvektor

Wenn wir zwei Boxen B_1, B_2 aneinander kleben,



$= -dF_{x+dx\, B_1}$

Kürzen sich die Beiträge $\vec{j}\, dF_{x+dx\, B_2} + \vec{j} \cdot dF_{x+dx\, B_1}$

$$= (\vec{j} - \vec{j})\, dF_{x+dx\, B_1} \qquad (1.12)$$

und es gilt

$$\int_{\partial(B_1+B_2)} \vec{j} \cdot d\vec{F} = \int_{B_1+B_2} \vec{\nabla} \vec{j} \, dV \qquad (1.13)$$

Wir können einen beliebigen Körper V aus infinitesimalen Boxen zusammenbauen, und es gilt

Gaußscher Satz

$$\boxed{\int_{\partial V} \vec{j}\cdot d\vec{F} = \int_{V} \vec{\nabla}\vec{j}\, dV} \qquad (1.14)$$

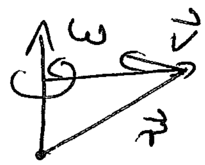
für beliebige V  ($d\vec{F}(\vec{r})$ ist senkrecht zur Tangentialebene an V im Punkt $\vec{r}$) und Vektorfelder $\vec{j}$.

In einer inkompressiblen Flüssigkeit gilt

$$\vec\nabla \vec j = 0 \qquad (\text{für } \vec\nabla \varrho = 0) \qquad (1.15)$$

In der E-dynamik gilt die Kontinuitätsgleichung Gl. (1.2): Der Abfluß $\vec\nabla \vec j$ aus einem Volumenelement $dV = dx\,dy\,dz$ ist gleich der Änderung der Ladungsdichte $\frac{\partial \varrho}{\partial t}$.

(ii) <u>Rotation:</u> (1) Sei $\vec v = \vec\omega \times \vec r$ die Geschwindigkeit einer Kreisbewegung



$$\vec v \perp \vec\omega, \quad \perp \vec r$$

$$\vec\nabla \times \vec v = \vec\nabla \times (\vec\omega \times \vec r) = (\vec\nabla\cdot\vec r)\,\vec\omega - (\vec\omega\cdot\vec\nabla)\,\vec r$$
$$= 3\,\vec\omega - \vec\omega = 2\vec\omega \qquad (1.16)$$

mit $(\vec\omega\cdot\vec\nabla)\,\vec r = \left(\omega_x \frac{\partial}{\partial x} + \omega_y \frac{\partial}{\partial y} + \omega_z \frac{\partial}{\partial z}\right)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec\omega$

oder

$$\vec\omega = \frac{1}{2}\left(\vec\nabla \times \vec v\right) \quad \text{Winkelgeschw.}$$

Flüssigkeiten: $\vec{\nabla} \times \vec{\omega} = 0$ wirbelfrei

$\vec{\nabla} \times \vec{\omega} \neq 0$ Wirbel

(2) Wann ist ein Vektorfeld $\vec{F}$ Gradient eines Potentials, $\vec{F} = -\vec{\nabla} V$?

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = - \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \cdot V)$$

$$= -\left[\left(\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial y} \right) V \hat{e}_x + \left(\frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial z} \right) V \hat{e}_y + \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial z} \right) V \hat{e}_y \right] \quad (1.17)$$

2mal diff.bar $\rightarrow = 0$