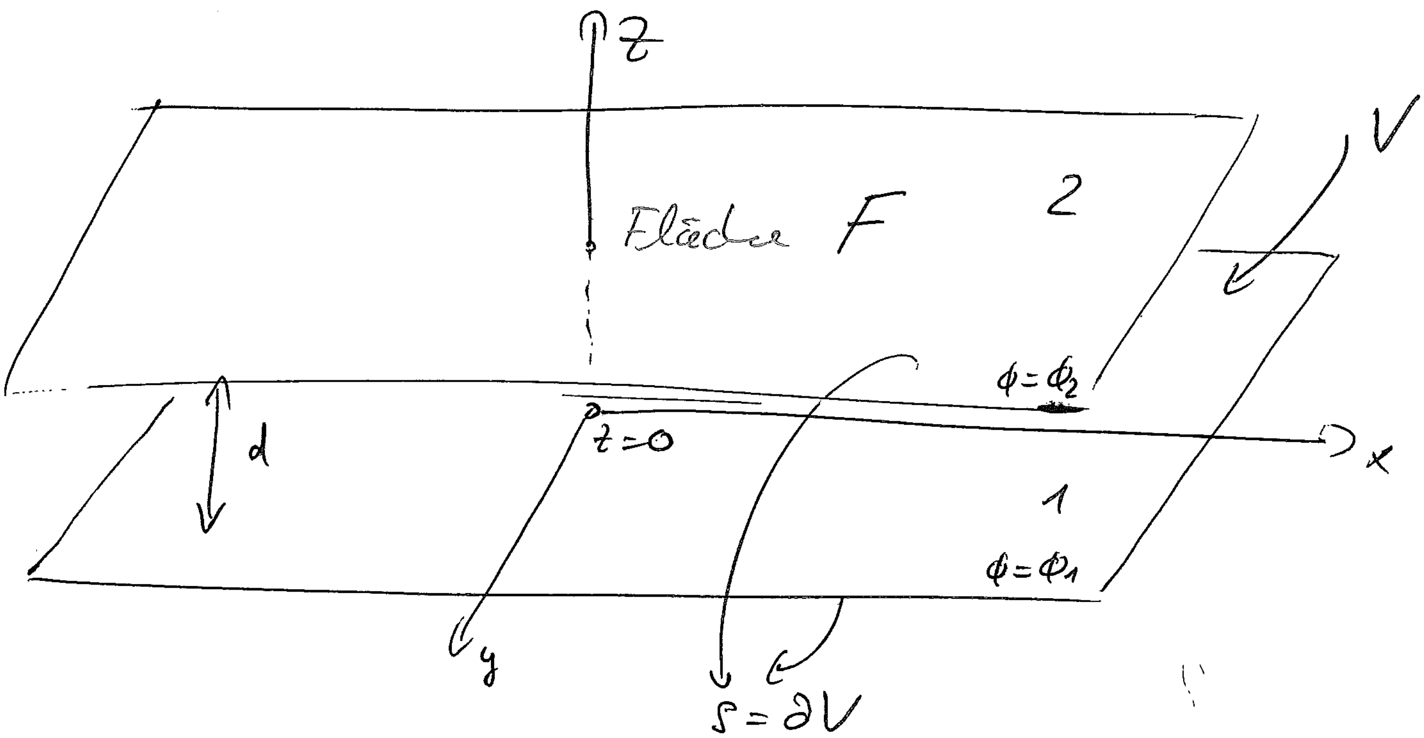
2.6 Feldenergie eines Plattenkondensators



Zur Bestimmung der Feldenergie (über $\vec{E}$)

müssen wir

$$\Delta \phi = 0 \quad \text{mit} \quad \phi(z=0) = \phi_1 \qquad (2.67)$$
$$\phi(z=d) = \phi_2$$

lösen. Wegen der Symmetrie ist ϕ von x und y unabhängig und (2.67) vereinfacht sich zu

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \phi(z) = 0 \quad \text{mit} \quad \phi(z) = az + b \qquad (2.68)$$

mit den beiden Integrationskonstanten a, b. Mit

$$\phi(0) = b = \phi_1 \;\; \& \;\; \phi(d) = ad + \phi_1 = \phi_2 \rightsquigarrow a = \frac{\phi_2 - \phi_1}{d} \qquad (2.69)$$

folgt
$$\phi = \frac{\phi_2 - \phi_1}{d} \cdot z + \phi_1$$

und das elektrische Feld, $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi$, (2.70)

$$E_x = E_y = 0 \quad , \quad E_z = -\frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{\phi_1 - \phi_2}{d}$$

und damit die Feldenergie

$$U = \frac{1}{8\pi} \int_V d^3r \, \vec{E}^2(\vec{r}) = \frac{1}{8\pi} \underbrace{\int dx\, dy}_{F} \int_0^d dz \, \frac{(\phi_1 - \phi_2)^2}{d^2}$$

$$= \frac{1}{8\pi} \, \frac{F}{d} \cdot (\phi_1 - \phi_2)^2 \qquad (2.71)$$

Die Kapazität ist definiert als

$$C = \frac{|\text{Ladung}|}{|\text{Potentialdifferenz}|} \qquad (2.72)$$

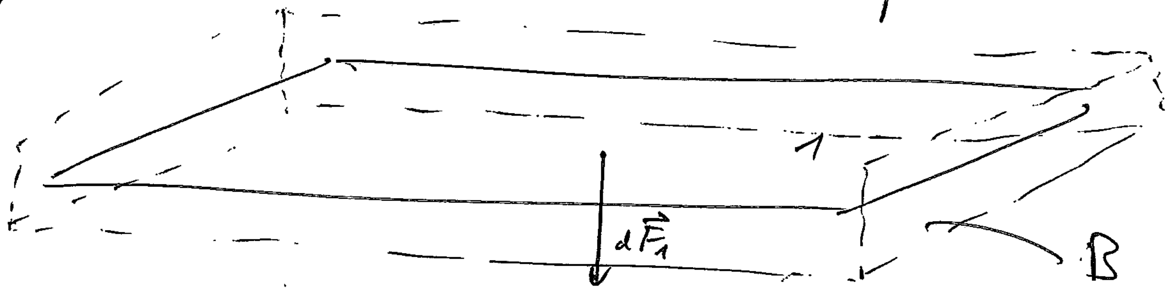
Zum Vergleich mit unserem Ergebnis muß noch die (Influenz)ladung auf einer Platte berechnet werden. Wir benutzen, (2.49)

$$\Delta\phi = -4\pi\rho \quad , \quad \vec{\nabla}\vec{E} = -\Delta\phi$$

und damit (2.73)

$$\frac{1}{4\pi} \int_B \vec{\nabla}\vec{E} = Q_B$$

wobei B ein Box um die Platte 1 des Kondensator ist, die die 2. Platte ausschließt.



Außerhalb des Kondensators ist $\vec E = 0$ und damit gilt

$$\frac{1}{4\pi}\int_B \vec\nabla \vec E = \frac{1}{4\pi}\int_{\partial B} \vec E\, d\vec F_B = -\frac{1}{4\pi}\int_{F_1} \vec E\, d\vec F_1$$

$$= \frac{1}{4\pi}\underbrace{\int_{F_1} dx\,dy}_{F}\; \vec E\cdot\hat e_z = \frac{F}{4\pi}\cdot\frac{\phi_1-\phi_2}{d} \tag{2.74}$$

$\vec E = \frac{\phi_1-\phi_2}{d}\hat e_z \leftarrow (2.70)$

und damit

$$Q_B = \frac{F}{4\pi d}(\phi_1-\phi_2)$$

$$\Rightarrow \boxed{C = \frac{F}{4\pi d}} \tag{2.75}$$

Obiges kann auch mit der allgem. Gleichung für die Feldenergie verglichen werden:

$$U = \frac{1}{2}\sum_{i,j} C_{ij}\phi_i\phi_j \tag{2.76}$$

verglichen werden. In unserem Beispiel ist

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2}\left(c_{11}\,\Phi_1^2 + 2c_{12}\,\Phi_1\Phi_2 + c_{22}\,\Phi_2^2\right)$$

mit $$c_{11} = c_{22} = -c_{12} = \frac{F}{4\pi d} \qquad (2.74)$$