Es folgt, daß

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{36\pi} \cdot 10^{-9} \frac{\text{Farad}}{m} \qquad (2.7)$$

Elektrische Feldkonstante

Jedes Einheitensystem besteht aus Basiseinheiten und abgeleiteten Einheiten

l, m, t

2.2 Elektrisches Feld

Wir hatten im letzten Kapitel 2.1 gesehen, daß eine Ladungsverteilung ein Kraftfeld für eine Testladung q_0 erzeugt hat.

Wir definieren das elektrische Feld $\vec{E}$ einer Ladungsverteilung unabhängig von q_0 als

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{q_0}\vec{F}(q_0) \qquad (2.8)$$

Vektorfeld

und, wg. (2.2), $(v)^*$ auf S. 9 und (2.3), S. 11,

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\phi(\vec{r}) \text{ mit } \phi(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{N} \frac{q_i}{|\vec{r}-\vec{r}_i|} \qquad (2.9)$$

Gl. (2.9) folgt mit $\vec{F}(q_0)$ aus Gl. (2.3), S. 10, und

$$\vec{\nabla}_r \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_i|} = - \frac{\vec{r}-\vec{r}_i}{|\vec{r}-\vec{r}_i|^3} \qquad (2.10)$$

siehe auch Gl. (2.2), S. 9. Obige Zusammenhänge lassen sich leicht auf kontinuierliche Ladungsverteilungen verallgemeinern,

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{N} q_i \frac{\vec{r}-\vec{r}_i}{|\vec{r}-\vec{r}_i|^3} \longrightarrow \int d^3\vec{r}\,'\rho(\vec{r}\,') \frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3} \qquad (2.11)$$

mit dem Grenzwert von Riemannschen Summen, und dem Superpositionsprinzip.

Das $\vec{E}$-Feld einer diskreten Ladungsverteilung ergibt sich mit

$$\rho(\vec{r}\,') = \sum_{i=1}^{N} q_i \, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Diracsche } \delta\text{-Fkt.}}}{\delta(\vec{r}\,'-\vec{r}_i)} \qquad (2.12)$$

mit

$$\delta(\vec{r}\,'-\vec{r}_i) = \delta(x'-x_i)\cdot\delta(y'-y_i)\cdot\delta(z'-z_i)$$

Die Diracsche δ-Fkt. oder einfach δ-Fkt. hat die Eigenschaft, daß

$$\int d^3r'\,\delta(\vec{r}\,')\cdot f(\vec{r}\,') = f(0) \qquad (2.13)$$

für beliebige Fkt. $f(\vec{r}\,')$. Damit gilt

$$\delta(\vec{r}\,') = 0 \quad \text{für } \vec{r}\,' \neq 0 \qquad (2.14)$$

und mit $\int d^3r'\,\delta(\vec{r}\,'-\vec{r}_i)\,f(\vec{r}\,') = f(\vec{r}_i)$ folgt

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{r}) &= \int d^3\vec{r}\,' \sum_i q_i\,\delta(\vec{r}\,'-\vec{r}_i)\,\frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3} \\ &= \sum_{i=1}^{N} q_i\,\frac{\vec{r}-\vec{r}_i}{|\vec{r}-\vec{r}_i|^3}\end{aligned} \qquad (2.15)$$

Das Potential ϕ des $\vec{E}$-Feldes in Gl. (2.9), S. 12, ist dann durch

$$\phi(\vec{r}) = \int d^3\vec{r}\,'\,\rho(\vec{r}\,')\cdot\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \qquad (2.16)$$

gegeben.

Diracsche Delta Fkt.:

Gesucht ist eine "Funktion" (Distribution) δ

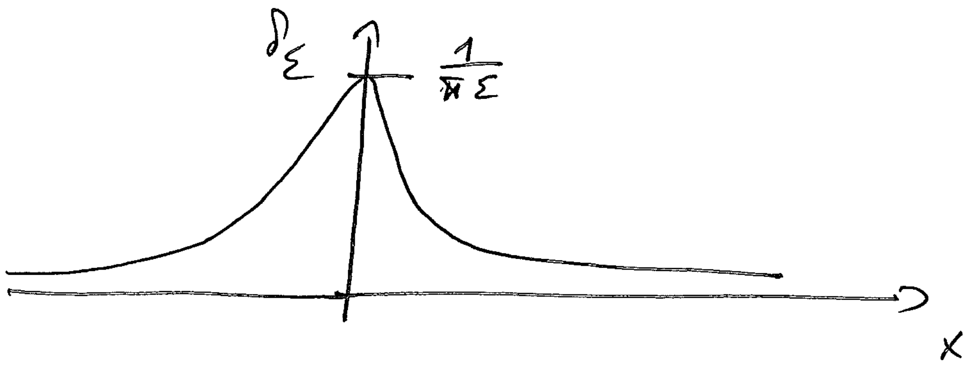
mit $\delta(x) = 0$ für $x \neq 0$ und $\int_{\mathbb{R}} dx\, \delta(x)\, f(x) = f(0)$.

Dazu definieren wir eine Fkt. $\delta_\varepsilon(x)$ mit

$$\int_{\mathbb{R}} dx\, \delta_\varepsilon(x) = 1 \qquad (2.17)$$

und $\lim_{\varepsilon \to 0} \delta_\varepsilon(x \neq 0) = 0$. Eine Wahl ist, $\varepsilon > 0$

$$\delta_\varepsilon(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + x^2} \qquad (2.18)$$



mit

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \delta_\varepsilon(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + x^2}$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \frac{1}{1 + x^2} \qquad (2.19)$$

Residuensatz $\rightarrow = 1$

oder

$\int dx \frac{1}{1+x^2} = \arctan x$

Nun ist

$$\lim_{\varepsilon/x_0 \to 0} \int_{x_0>0}^{\infty} dx \; \delta_\varepsilon(x) = 0 = \lim_{\varepsilon/x_0 \to 0} \int_{-\infty}^{-x_0} dx \, \delta_\varepsilon(x) \qquad (2.20)$$

und so

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}} dx \, \delta_\varepsilon(x) \, f(x) \underset{\substack{\uparrow \\ f(x) \text{ fällt ab} \\ \text{für } x \to \pm\infty}}{=} \lim_{x_0 \to \infty} \lim_{\varepsilon/x_0 \to 0} \int_{-x_0}^{x_0} dx \, \delta_\varepsilon(x) \, f(x) \qquad (2.21)$$

$$f \text{ stetig} \longrightarrow \; = f(0)$$

Damit folgt, „$\delta(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \delta_\varepsilon(x)$",

$$\int_{\mathbb{R}} dx' \, \delta(x - x') \, f(x') = f(x) \qquad (2.22)$$

$$\text{„} \lim_{\varepsilon \to 0} \int dx' \, \delta_\varepsilon(x - x') \, f(x') \text{"}$$

Es gibt unzählige Darstellungen der δ-Fkt, eine weitere einfache ist

$$\delta_\varepsilon(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\,\varepsilon} \, e^{-x^2/\varepsilon^2} \qquad (2.23)$$

Zeige, daß δ_ε aus (2.23) die Eigenschaften (2.17) und $\lim_{\varepsilon \to 0} \delta_\varepsilon(x \neq 0) = 0$ hat.