2.3 Grundgesetz der Elektrostatik

Wir hatten im letzten Kapitel, 2.2, gesehen, daß das elektrische Feld einer Ladungsverteilung durch

$$\vec{E}(\vec{r}) = \int d^3r' \, \rho(\vec{r}\,') \frac{\vec{r} - \vec{r}\,'}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3} \qquad (2.20)$$

mit

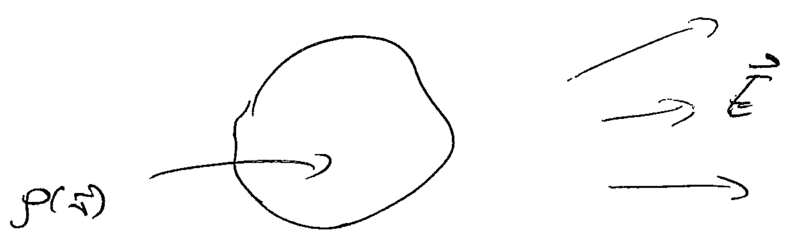
$$\rho(\vec{r}\,') = \sum_{i=1}^{N} q_i \, \delta(\vec{r}\,' - \vec{r}_i)$$

für eine Verteilung von Punktladungen.

Eine der offensichtlichen Fragestellungen ist nun, von einem durch eine Probeladung gemessenen $\vec{E}$-Feld auf

(1) die Gesamtladung der Ladungsverteilung

(2) die Dichtefkt. $\rho(\vec{r})$ zu schließen



Im Falle einer Punktladung ist

$$\vec{E} = q \cdot \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} = q/r^2 \cdot \hat{e}_r \qquad (2.21)$$

mit

$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} = |\vec{r}| \;, \quad \hat{e}_r = \vec{r}/r$$ Einheitsvektor in $\vec{r}$-Richtung

Wir bemerken unter anderem, (siehe Gl. 2.10)

$$\vec{\nabla} \frac{1}{r} = - \vec{r}\; 1/r^3 \qquad (2.22)$$

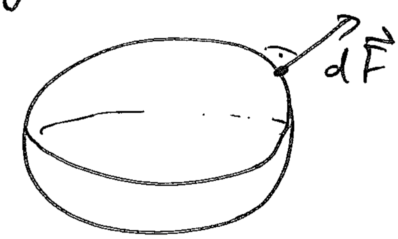
und daher

$$\vec{E} = - q\, \vec{\nabla} \cdot 1/r \qquad (2.23)$$

Der (16) Fluß des elektrischen Feldes aus einer Oberfläche S_r einer Kugel K_r die Punktladung (im Ursprung) ist

$$\int_{S_r} \vec{E}\, d\vec{F} \qquad (2.24)$$

mit dem Oberflächenelement $d\vec{F}$



Die Kugel kann man sich aus infinitesimalen Quadern aufbauen, siehe S. 5-6 (Divergenz).

$d\vec{F}$ ist ein Vektor, der in $\vec{r}$-Richtung zeigt; die Länge $|d\vec{F}|$ ist die Fläche des Flächenelements dS_r mit $S_r = 4\pi r^2$.

Im vorliegenden Fall haben wir also

$$\int \vec{E}\, d\vec{F} = \int_{S_r} dS\, q \cdot \frac{\vec{r}\cdot \vec{e}_r}{r^3}$$

$$= q \int_S dS_r \, 1/r^2 = q/r^2 \int_{S_r} dS_r$$

$$\Rightarrow \boxed{\int \vec{E}\, d\vec{F} = q/r^2 \, S_r = 4\pi q} \qquad (2.25)$$

Obige Gleichung lässt sich mit dem Gaußschen Satz auch als Volumenintegral darstellen.

Wir benutzen nun den Gaußschen Satz, siehe Seite 6a

$$\int_{S_r} \vec{E}\, d\vec{F} = \int_V \vec{\nabla}\vec{E}\, dV \qquad (2.26)$$

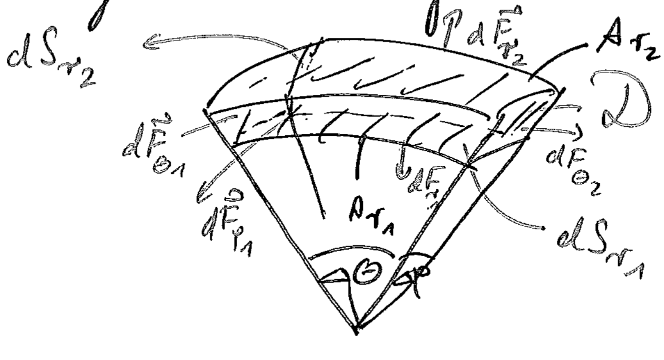
den wir aus unseren Überlegungen zur Divergenz sofort herleiten können. Außerdem gilt

$$4\pi q = 4\pi \int_{S_r} dV\, \rho(\vec{r}) \qquad (2.27)$$

mit $\rho(\vec{r}) = q\,\delta(\vec{r})$, und daher

$$\boxed{\int_{S_r} \vec{\nabla}\vec{E}\, dV = 4\pi \int_{S_r} \rho(\vec{r})\, dV} \qquad (2.28)$$

Des weiteren gilt, daß das Integral über ein Kegelschalensegment $\mathcal{D}$ über $\vec{\nabla}\vec{E}$ verschwindet,



$$d\vec{F}_{r_2} = \hat{e}_{r_2}\, dS_{r_2}$$

$$d\vec{F}_{r_1} = -\hat{e}_{r_1}\, dS_{r_1}$$

$$d\vec{F}_{\Theta},\ d\vec{F}_{\varphi} \perp \hat{e}_r$$

$$\boxed{A_r = \frac{\Delta\varphi}{2\pi}\frac{\Delta\Theta}{\pi}\, 4\pi r^2}$$

$$\int_D \vec{\nabla} \vec{E}\, dV = -q \int_{A_{r_1}} dS_{r_1}/r_1^2 + q \int_{A_{r_2}} dS_{r_2}/r_2^2$$

$$= q(-1 + 1)\frac{2\Delta\varphi\Delta\Theta}{\pi} = 0 \quad (2.29)$$

Es folgt, daß Gl. (2.28) für beliebige Volumina V gilt, da diese aus Kegeln und infinitesimalen Kugelschalensegmenten aufgebaut werden können. Es gilt damit (wg. superposition)

$$\int_V \vec{\nabla} \vec{E}\, dV = 4\pi \int_V \rho(\vec{r})\, dV, \quad (2.30)$$

auch für infinitesimale Volumina, und damit

$$\boxed{\vec{\nabla} \vec{E}(\vec{r}) = 4\pi \rho(\vec{r})} \quad (2.31)$$

das Grundgesetz der Elektrostatik.

Gl. (2.31) wurde mit dem Kraftgesetz $\vec{F} \sim \vec{r}/r^3$ und dem Superpositionsprinzip hergeleitet.

Für eine Punktladung gilt

$$\vec{\nabla}\,\vec{E} = q\,\vec{\nabla}\,\frac{\vec{r}}{r^3} = 4\pi\,\rho(\vec{r}) \qquad (2.32)$$

mit $\rho(\vec{r}) = q \cdot \delta(\vec{r})$, was sofort mit

$\vec{\nabla}\,\vec{r}/r^3 = 0$, $r \neq 0$ und $\int dV\,\vec{\nabla}\vec{E} = 4\pi$ folgt.

Damit haben wir die Fragen (1), (2) auf S. 15 beantwortet.

Wir haben weiterhin gesehen, daß das $\vec{E}$-Feld einer Superposition von Punktladungen aus einem Pot. hergeleitet werden kann, Gl. (2.9) auf S. 12. Allgemein gilt

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\,\phi(\vec{r}) \quad \text{mit } \phi(\vec{r}) = \int d^3r'\,\rho(\vec{r}')\,\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

mit Gl. (2.22). Es folgt sofort, (2.33)

daß $\vec{E}$ wirbelfrei ist,

$$\boxed{\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\cdot\phi(\vec{r}) = 0} \qquad (2.34)$$

Mit Gl. (2.28) folgt außerdem

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = -\underbrace{\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}}_{\Delta\text{: Laplace operator}} \phi(\vec{r}) = -\Delta \phi(\vec{r}) \qquad (2.35)$$

und damit die Poissongleichung

$$\boxed{\Delta \phi(\vec{r}) = -4\pi \rho(\vec{r})} \qquad (2.36)$$

mit $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$.

Die Lösung ϕ der Poissongleichung ist Gl. (2.33)

$$\phi(\vec{r}) = \int d^3r' \, \rho(\vec{r}\,') \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} + \phi_0(\vec{r}) \qquad (2.37)$$

mit $\Delta \phi_0(\vec{r}) = 0$.

2.4 Energie des elektrostatischen Feldes

Die potentielle Energie einer Punktladung q im elektrischen Feld $\vec{E}$ ist die Energie, die man braucht, um q von $\vec{r} = \infty$ zum Ort $\vec{r} = \vec{x}$ zu bringen.