Mit Gl. (2.28) folgt außerdem

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = - \underbrace{\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}}_{\Delta\text{: Laplace operator}} \phi(\vec{r}) = - \Delta \phi(\vec{r}) \qquad (2.35)$$

und damit die Poissongleichung

$$\boxed{\Delta \phi(\vec{r}) = -4\pi \rho(\vec{r})} \qquad (2.36)$$

mit $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$.

Die Lösung ϕ der Poissongleichung ist Gl. (2.33)

$$\phi(\vec{r}) = \int d^3r' \rho(\vec{r}') \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \phi_0(\vec{r}) \qquad (2.37)$$

mit $\Delta \phi_0(\vec{r}) = 0$.

2.4 Energie des elektrostatischen Feldes

Die potentielle Energie einer Punktladung q im elektrischen Feld $\vec{E}$ ist die Energie, die man braucht, um q von $\vec{r} = \infty$ zum Ort $\vec{r} = \vec{x}$ zu bringen.

$$U(\vec{x}) = -\int_{\infty}^{\vec{x}} q \cdot \vec{E}\, d\vec{r} = +q \int_{\infty}^{\vec{x}} \vec{\nabla}\phi\, d\vec{r}$$
$$= q\, \phi(\vec{x}) \qquad (2.37)$$

U ist die Arbeit, die man braucht, um eine Ladung q einer existierenden Ladungsverteilung mit $\Delta\phi(\vec{x}) = -4\pi\rho(\vec{x})$, Gl. (2.36) hinzuzufügen.

Für eine diskrete Ladungsverteilung ist daher die Arbeit, die benötigt wird, um diese Lad. vert. aus dem Unendlichen aufzubauen,

$$U_W = \frac{1}{2}\sum_{i \neq j} \frac{q_i q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} \qquad (2.39)$$

U_W nennt man die Wechselwirkungsenergie.

Gl. (2.39) enthält nicht den Beitrag der $\vec{E}$-Felder der Einzelladungen. Wenn man sich diese wieder als ausgedehnte Ladungsverteilungen vorstellt, kann man aus Gl. (2.39) auch den sogenannten Selbstenergieanteil berechnen.

Für eine kont. Ladungsverteilung gilt

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2} \int \frac{\rho(\vec{r})\,\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}\, d^3r'\, d^3r \qquad (2.40)$$

Mit der Poissongl. und part. Integration kann Gl. (2.40) im $\vec{E}$-Feld ausgedrückt werden.

Wir benutzen $\phi(\vec{r}) = \int \frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}\, d^3r'$ und daher

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2} \int \rho(\vec{r})\, \phi(\vec{r})\, d^3r$$

Poissongl. (2.36) $\Rightarrow$ $$= -\frac{1}{2} \int \frac{1}{4\pi} \Delta\phi(\vec{r})\, \phi(\vec{r})\, d^3r$$

part. Int. & $\phi(\infty)=0$ $$= \frac{1}{8\pi} \int \underbrace{\vec{\nabla}\phi(\vec{r})}_{-\vec{E}}\, \underbrace{\vec{\nabla}\phi(\vec{r})}_{-\vec{E}}\, d^3r$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathcal{U} = \frac{1}{8\pi} \int \vec{E}^{\,2}(\vec{r})\, d^3r} \qquad (2.41)$$

Bemerkungen: (i) $\mathcal{U} > 0$, dominiert durch Selbstenergie, denn $\mathcal{U}_W$ (Gl. 2.39) für z.B. 2 entgegengesetzte P.-Lad.

(ii) Die Feldenergie einer Punktladung ist unendlich:

$$\vec{E}(\vec{r}) = q \frac{\vec{r}}{r^3} \curvearrowright \vec{E}^2 = q^2 \frac{1}{r^4} \qquad (2.42)$$

und damit

$$U = \frac{1}{8\pi} \int \frac{1}{r^4} d^3r = \infty \qquad (2.43)$$

Durch Gleichsetzung der Feldenergie einer homogen geladenen Kugel mit Radius R_e und der Ruheenergie eines Elektrons $m_e c^2$ ergibt sich der klass. Elektronenradius:

$$r_e = \frac{3}{5} \frac{e^2}{m_e c^2} = 2.82 \cdot 10^{-15} m \qquad (2.44)$$

(Aufgabe)

Nehmen wir nun an, daß die Ladung q gleichmäßig in einer Kugel K_R mit Radius R verteilt ist. Um die Feldenergie berechnen zu können benötigen wir $\vec{E}$: Die elektr. Feldstärke zeigt aus

Symmetriegründen in Richtung $\hat{e}_r$ (Koordinatenursprung im Zentrum der Kugel),

$$\vec{E}(\vec{r}) = E(r)\,\hat{e}_r \qquad (2.45)$$

Mit Gl. (2.30) gilt

$$\int_{S_r} \vec{E}\, d\vec{F} = E(r) \int_{S_r} d\vec{F}\cdot\hat{e}_r \qquad (2.46)$$

$$= 4\pi r^2 E(r) = 4\pi \int_{K_r} \rho(\vec{r}\,')\, dV'$$

oder

$$E(r) = \frac{1}{r^2} \int_{K_r} \rho(\vec{r}\,')\, dV'$$

$$\rho(\vec{r}) = \frac{q}{\frac{4\pi}{3}R^3}\Theta(R-r) \longrightarrow \quad = \frac{1}{r^2}\, q \left[\Theta(r-R) + \frac{r^3}{R^3}\Theta(R-r)\right] \qquad (2.47)$$

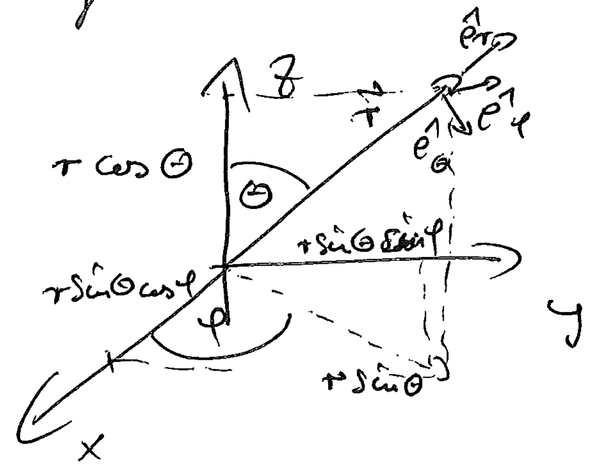
Damit ergibt sich die Feldenergie zu

$$U = \frac{q^2}{8\pi} \int d\Omega\, dr\, r^2 \left[\frac{1}{r^4}\Theta(r-R) + \frac{r^2}{R^6}\Theta(R-r)\right]$$

Winkelintegration : $\int_\Omega d\Omega = 4\pi$

$$\Rightarrow \quad \boxed{U = \frac{q^2}{2}\left[\frac{1}{R} + \frac{1}{5}\frac{1}{R}\right] = \frac{3q^2}{5}\frac{1}{R}} \qquad (2.48)$$

Kugelkoordinaten:



$$\vec{r} = \begin{pmatrix} r \cdot \sin\Theta \cos\varphi \\ r \cdot \sin\Theta \sin\varphi \\ r \cdot \cos\Theta \end{pmatrix}$$

Die Einheitsvektoren $\hat{e}_{r,\Theta,\varphi}$ sind durch

$$\hat{e}_r = \frac{\partial}{\partial r}\vec{r} \Big/ \left|\frac{\partial}{\partial r}\vec{r}\right| , \ldots \qquad (2.49)$$

gegeben. Daher gilt

$$\hat{e}_r = \begin{pmatrix} \sin\Theta\cos\varphi \\ \sin\Theta\sin\varphi \\ \cos\Theta \end{pmatrix}, \quad \hat{e}_\Theta = \begin{pmatrix} \cos\Theta\cos\varphi \\ \cos\Theta\sin\varphi \\ -\sin\Theta \end{pmatrix}, \quad \hat{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin\Theta\sin\varphi \\ \sin\Theta\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (2.50)$$

Das Volumenmass in Kugelkoordinaten ist

$$d^3r = J(r,\Theta,\varphi) \cdot dr\, d\Theta\, d\varphi \qquad (2.51)$$

mit

$$J(r,\Theta,\varphi) = \det \frac{\partial \vec{r}}{\partial(r,\Theta,\varphi)}$$

und

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial(r,\Theta,\varphi)} = \begin{pmatrix} \underbrace{\begin{matrix} \sin\Theta\cos\varphi \\ \sin\Theta\sin\varphi \\ \cos\Theta \end{matrix}}_{\hat{e}_r} & r \cdot \hat{e}_\Theta & r\,\hat{e}_\varphi \end{pmatrix}$$

und damit gilt

$$\det \frac{\partial \vec{r}}{\partial(r,\Theta,\varphi)} = r^2 \sin\Theta \qquad (2.52)$$

wie auch

$$d^3 r = r^2 \sin\Theta \, dr \, d\Theta \, d\varphi$$
$$= r^2 \, dr \, d(\cos\Theta) \, d\varphi$$