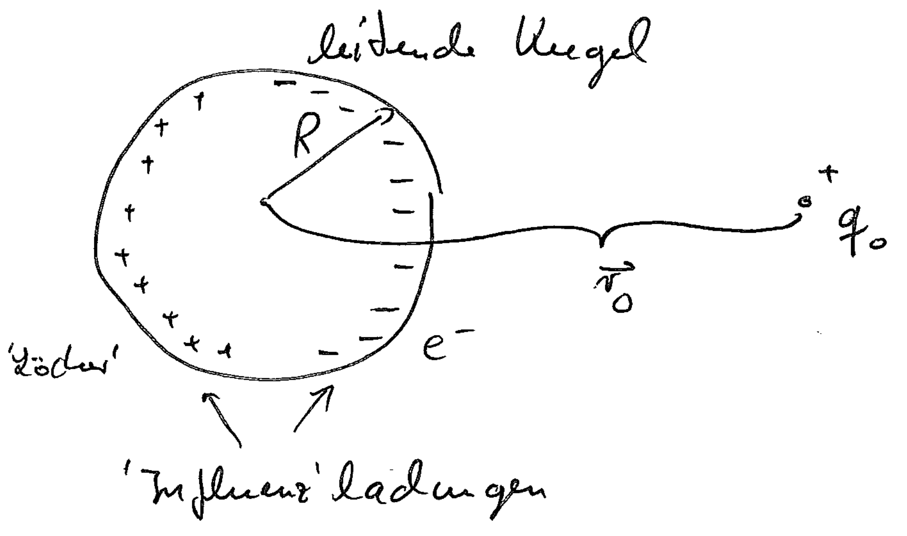
2.5 Randwertproblem der Elektrostatik

Die Grundgleichungen der Elektrostatik,

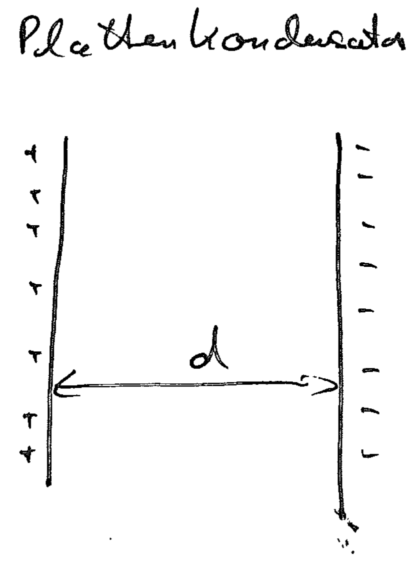
$$\left.\begin{array}{l}\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 4\pi\rho \\ \vec{\nabla}\times\vec{E} = 0\end{array}\right\} \Rightarrow \vec{E} = -\vec{\nabla}\phi \quad \text{mit} \quad \Delta\phi(\vec{r}) = -4\pi\rho(\vec{r}), \tag{2.49}$$

die Maxwellgl. (1.1), S. 1 für die elektrische Feldstärke (mit zeitunab. magn. Feldstärke $\vec{B}$) haben die Lösung $\phi(\vec{r}) = \int d^3r' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$, siehe Gl. (2.16), S. 14 ff.. Für eine gegebene Ladungsverteilung ρ kann damit alles bestimmt werden.

Im Allgemeinen ist das jedoch nicht der Fall, z. B.:



,



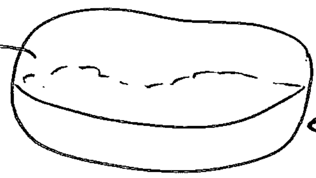
Die Ladungsträger in der leitenden Kugel (Elektronen mit −) sind frei beweglich, damit verschwindet das $\vec{E}$-Feld in der Kugel.

Die allgemeine Problemstellung ist die eines Randwertproblems für das Potential ϕ:

Löse

$$\Delta \phi(\vec{r}) = -4\pi \rho(\vec{r})$$

für $\vec{r} \in V$



$\partial V = S$ (2.50)

mit $\rho(\vec{r})$ gegeben in V

& $\phi(\vec{r})$ gegeben auf $S = \partial V$

Was ist $\phi(\vec{r})$ (und damit $\vec{E}$) im Gebiet V?

Dies ist ein Dirichletsches Randwertproblem.

Für die Lösung des Randwertproblems starten wir mit

$$\phi(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi}\int_V d^3r'\, \phi(\vec{r}')\, \Delta_r G(\vec{r}, \vec{r}') \qquad (2.51)$$

mit Greenscher Funktion $G(\vec{r}, \vec{r}')$ mit

$$\Delta_r G(\vec{r}, \vec{r}') := -4\pi\, \delta(\vec{r} - \vec{r}') \qquad (2.52)$$

der Lösung zur Einheitsquelle. Eine beliebige Lösung $\phi(\vec{r})$ erfüllt

$$\phi(\vec{r}) = \int_V d^3r'\, \rho(\vec{r}')\, G(\vec{r}, \vec{r}'), \qquad (2.53)$$

was leicht mit $\Delta_r \phi(\vec{r}) = \int_V d^3r'\, \rho(\vec{r}')\, \Delta_r G(\vec{r}, \vec{r}')$ gezeigt wird.

Nun verwenden wir für (2.51) den Greenschen Satz

$$\int_V (\varphi \Delta_{r'} \psi - \psi \Delta_{r'} \varphi)\, d^3r' = \int_S (\varphi \cdot \vec{\nabla}_{r'} \psi - \psi \vec{\nabla}_{r'} \varphi)\, d\vec{F}. \qquad (2.54)$$

Beweis durch part. Integrat. siehe S. 28a.

Beweis Greenscher Satz:

$$\int_V \varphi(\vec{r}\,') \underbrace{\Delta_{r'}}_{\vec{\nabla}_{r'}\cdot\vec{\nabla}_{r'}} \psi(\vec{r}\,')\, d^3r' = \int_V \left[\vec{\nabla}(\varphi \vec{\nabla}\psi) - (\vec{\nabla}\varphi)\vec{\nabla}\psi\right] d^3r'$$

$$= \int_S \varphi \vec{\nabla}\psi\, d\vec{F}' - \int_V \left[\vec{\nabla}\left((\vec{\nabla}\varphi)\psi\right) - (\Delta\varphi)\psi\right] d^3r'$$

(2.55)

$$= \int_V \psi \Delta \varphi\, d^3r' + \int_S (\varphi \vec{\nabla}\psi - \psi \vec{\nabla}\varphi)\, d\vec{F}'$$

$\square$

Für $\varphi(\vec{r}\,') = G_D(\vec{r}, \vec{r}\,')$ und $\psi(\vec{r}\,') = G_D(\vec{r}\,'', \vec{r}\,')$ folgt für Greensche Fkt. G_D mit $G_D(\vec{r}, \vec{r}\,' \in S) \stackrel{!}{=} 0$,

$$\int_V d^3r' \left[G(\vec{r}, \vec{r}\,') \underbrace{\Delta_{r'} G(\vec{r}\,'', \vec{r}\,')}_{-4\pi\,\delta(\vec{r}\,'-\vec{r}\,'')} - G(\vec{r}\,'', \vec{r}\,') \underbrace{\Delta_{r'} G(\vec{r}, \vec{r}\,')}_{-4\pi\,\delta(\vec{r}-\vec{r}\,')} \right]$$

$$= \int_S d\vec{F}' \overbrace{\left[\underbrace{G(\vec{r}, \vec{r}\,')}_{0} \vec{\nabla}_{r'} G(\vec{r}\,'', \vec{r}\,') - \underbrace{G(\vec{r}\,'', \vec{r}\,')}_{0} \vec{\nabla}_{r'} G(\vec{r}, \vec{r}\,') \right]}^{0}$$

(2.56)

$$= G(\vec{r}, \vec{r}\,'') - G(\vec{r}\,'', \vec{r}) \qquad \square$$

Mit $\varphi = \phi$ und $\psi = G$ folgt aus Gl. (2.51), (2.54)

$$\boxed{\begin{aligned}\phi(\vec r) &= -\frac{1}{4\pi}\int_V G(\vec r,\vec r\,')\,\Delta_{r'}\phi(\vec r\,')\,d^3r' \\ &\quad + \frac{1}{4\pi}\int_S \left[\vec\nabla_{r'}\phi(\vec r\,')\,G(\vec r,\vec r\,') - \phi(\vec r\,')\,\vec\nabla_{r'}G(\vec r,\vec r\,')\right]d\vec F\end{aligned}} \qquad (2.57)$$

und mit der Poissongl., siehe (2.50),

$$\phi(\vec r) = \int_V \rho(\vec r\,')\,G(\vec r,\vec r\,')\,d^3r' + \frac{1}{4\pi}\int_S \left[(\vec\nabla\phi)\cdot G - \phi\,\vec\nabla G\right]d\vec F' \qquad (2.58)$$

Die rechte Seite von Gl. (2.57) hängt von ρ, G in V und von $\vec\nabla\phi(\vec r\,')\,G(\vec r,\vec r\,')$ & $\phi(\vec r\,')\,\vec\nabla_{r'}G(\vec r,\vec r\,')$ für $\vec r\,' \in S$ ab.

Wir hatten $\phi|_S$ als gegeben vorausgesetzt, damit benötigen wir $\boxed{G_D(\vec r, \vec r\,' \in S) \overset{!}{=} 0}$, um die unbekannte Fkt. $\vec\nabla\phi(\vec r\,' \in S)$ zu eliminieren. Es folgt

$$\boxed{\begin{aligned}\phi(\vec r) &= \int_V \rho(\vec r\,')\,G_D(\vec r,\vec r\,')\,d^3r' - \frac{1}{4\pi}\int_S \phi(\vec r\,')\,\vec\nabla_{r'}G_D(\vec r,\vec r\,')\,d\vec F' \\ &\text{mit } G_D(\vec r, \vec r\,' \in S) \overset{!}{=} 0\end{aligned}} \qquad (2.59)$$

mit Dirichletscher Randbedingung

$$G_D(\vec{r},\vec{r}\,') \hat{=} 0 \quad \text{für } \vec{r}\,' \in S \qquad (2.60)$$

Alternativ kann (2.56) für bekanntes $\vec{\nabla}\phi(\vec{r} \in S)$ gelöst werden. Dann braucht man <u>Neumannsche</u> Randbedingungen

$$\hat{e}_n \cdot \vec{\nabla}_{r'} G_N(\vec{r},\vec{r}\,') = 0 \qquad (2.61)$$

mit $d\vec{F} = dS\,\hat{e}_n$, $\hat{e}_n^2 = 1$.

Mit dem Greenschen Satz folgt sofort, daß

$$G_D(\vec{r},\vec{r}\,') = G_D(\vec{r}\,',\vec{r}), \qquad (2.62)$$

siehe Seite 28a.

Weiterhin gilt, daß $\phi(\vec{r})$ mit Gl. (2.57) die eindeutige Lösung zur Poissongl.

$$\Delta\phi(\vec{r}) = -4\pi\rho(\vec{r}) \quad \text{mit } \phi(\vec{r} \in S) \text{ gegeben}$$

ist. Dies folgt wieder mit dem Gaußschen Satz:

Sei $\Phi_1(\vec{r}) = \Phi(\vec{r}) + \varphi(\vec{r})$ ein weitere Lösung.

Dann gilt

$$\int_V \underset{\overset{\|}{0}}{\varphi \Delta \varphi} \, d^3r \overset{\text{Gaußscher Satz}}{=} -\int_V (\vec{\nabla}\varphi)^2 d^3r + \int_S \varphi \vec{\nabla}\varphi \, d\vec{F} \qquad (2.63)$$

$\Delta\Phi_1 = \Delta\Phi = -4\pi\rho \Rightarrow \Delta\varphi = 0$

Da $\Phi_1(\vec{r}\in S) = \Phi(\vec{r}\in S)$ folgt $\varphi(\vec{r}\in S) = 0$ und damit

$$\int_V (\vec{\nabla}\varphi)^2 d^3r = 0 \Rightarrow \vec{\nabla}\varphi(\vec{r}\in V) = 0 \qquad (2.64)$$

Mit der Stetigkeit von $\varphi(\vec{r})$ in V und $\varphi(\vec{r}\in S)$ folgt dann

$$\varphi(\vec{r}) \hat{=} 0 \qquad (2.65) \qquad \square$$

Triviales Beispiel: $V = \mathbb{R}^3$, $\partial V = \{\vec{r}, r = \infty\}$.

$$G_D(\vec{r}, \vec{r}\,') = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} \qquad (2.65)$$

Bew.: Es gilt

$$\Delta_r \frac{1}{r}\Big|_{r\neq 0} = -\vec{\nabla}_r \, \vec{r}/r^3 = -3/r^3 + \frac{3\,\vec{r}\cdot\vec{r}}{r^5} = 0 \qquad (2.66)$$

und

$$\int_{K_R} d^3r \, \Delta_r \frac{1}{r} = -\int_{S_R} \vec{\nabla}_r \frac{\vec{r}}{r^3} d\vec{F} = -\int \frac{\hat{e}_r \vec{r}}{r^3}\Big|_{r=R} dS_R \overset{\int_{S_R} dS_R = 4\pi R^2}{=} -4\pi$$

K_R: Kugel um $\vec{r}=0$ mit Radius R

für alle R.