2.7. Multipolentwicklung

In Kapitel 2.4 hatten wir gesehen, daß das elektrische Feld außerhalb einer homogen geladenen Kugel mit Gesamtladung q das einer Punktladung mit Ladung q ist.

Inwieweit können wir am elektrischen Feld die Ladungsverteilung auflösen? Wir betrachten

$$\phi(\vec{r}) = \int d^3r' \, \frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} \qquad (2.75)$$

mit einer lokalisierten Ladungsverteilung, $\rho(|\vec{r}\,'| > R) = 0$.

Sei nun $r \gg R$ und damit $r \gg r'$ im Integral in (2.75). Dann können wir $1/|\vec{r} - \vec{r}\,'|$ in Ordnungen von r'/r entwickeln,

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} = \frac{1}{(\vec{r}^{\,2} - 2\vec{r}\,\vec{r}\,' + \vec{r}\,'^2)^{1/2}} = \frac{1}{r\left(1 - 2\frac{\vec{r}\,\vec{r}\,'}{r^2} - r'^2/r^2\right)^{1/2}}$$

$$= \frac{1}{r}\left(1 + \frac{1}{2}\left(2\,\frac{\vec{r}\,\vec{r}\,'}{r^2} - \frac{r'^2}{r^2}\right) + \frac{3}{8}\left(2\frac{\vec{r}\,\vec{r}\,'}{r^2} - r'^2/r^2\right)^2 + \ldots\right) \qquad (2.76)$$

Wir setzen nun (2.76) in (2.75) ein und erhalten

$$\phi(\vec{r}) = \int d^3r' \frac{\rho(\vec{r}')}{r}\left[1 + \frac{1}{2}\left(2\frac{\vec{r}\,\vec{r}'}{r^2} - r'^2/r^2\right) + \frac{3}{8}\left(\quad\right)^2 + \dots\right] \tag{2.77}$$

was in Ordnungen von $1/r$ geschrieben werden kann, mit Koeffizienten

$$\begin{aligned} 1/r &: \quad Q = \int d^3r' \rho(\vec{r}') && \text{Gesamtladung} \\ 1/r^3\, \vec{r} &: \quad \vec{p} = \int d^3r' \rho(\vec{r}')\, \vec{r}' && \text{Dipolmoment} \\ \frac{1}{r^5} r_i r_j &: \quad Q_{ij} = \int d^3r' \rho(\vec{r}')\left(3 r_i' r_j' - r'^2 \delta_{ij}\right) \end{aligned} \tag{2.78}$$

mit $\vec{r} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}$

Quadrupolmoment
(analog Trägheitstensor)
! Unterschied ? !

Damit ergibt sich

$$\phi(\vec{r}) = \frac{Q}{r} + \frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^3} + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{3} \frac{Q_{ij}\, r_i r_j}{r^5} + \dots \tag{2.79}$$

Frage: Wie sieht die Multipolentwicklung des Gravitationspot. aus? $\boxed{\vec{p} = 0}$

Mit $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi$ folgt die entsprechende Multipolentwicklung für $\vec{E}$.

Setzen wir nun eine gegebene Ladungsverteilung $\rho(\vec{r})$ (lokalisiert) in ein externes elektrisches Feld (mit Potential ϕ_{ex}), dann haben wir die Wechselwirkungsenergie

$$U_W = \int d^3r \, \rho(\vec{r}) \, \phi_{ex}(\vec{r}), \qquad (2.80)$$

was wieder in eine Multipolentwicklung geschrieben werden kann. Sei ρ lokalisiert um $\vec{r}=0$ (oEdA).

Es gilt

$$\phi_{ex}(\vec{r}) = \phi_{ex}(0) - \vec{r}\,\vec{E}_{ex}(0) - \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{3} r_i r_j \frac{\partial E_{exi}}{\partial r_j}(\vec{r}=0) + \ldots \qquad (2.81)$$

Das externe elektr. Feld hat keine Quellen bei $\vec{r}=0$, und damit gilt $\vec{\nabla}\vec{E}(\vec{r}=0)=0$. Es folgt

$$\frac{1}{2}\sum_{i,j} r_i r_j \frac{\partial E_{exi}}{\partial r_j}(0) = \frac{1}{6}\sum_{i,j}\left(3r_i r_j - r^2\delta_{ij}\right)\frac{\partial E_{exi}}{\partial r_j}(0) \qquad (2.82)$$

und damit

$$U_W = \phi_{ex}(0) \overbrace{\int d^3r\, \rho(\vec{r})}^{Q} - \vec{E}_{ex}(0) \overbrace{\int d^3r\, \rho(\vec{r})\, \vec{r}}^{\vec{p}} \tag{2.83}$$

$$- \sum_{i,j} \frac{\partial E_{ex\,i}}{\partial x_j}(0)\, \frac{1}{6} \underbrace{\int d^3r\, \rho(\vec{r}) \left(3r_i r_j - \delta_{ij} r^2\right)}_{Q_{ij}} + \ldots$$

oder

$$\boxed{U_W = \phi_{ex}(0) \cdot Q - \vec{E}_{ex}(0) \cdot \vec{P} - \frac{1}{6} Q_{ij} \frac{\partial E_{ex\,i}}{\partial r_j} + \ldots} \tag{2.84}$$