3.2 Magnetisches Feld & Feldgleichungen

Die Kraft auf einen stromdurchflossenen Leiter, (3.8), kann mithilfe des magnetischen Feldes $\vec{B}$ formuliert werden, mit

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{1}{c} \int d^3r' \; \vec{j}(\vec{r}') \times \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

$$= -\frac{1}{c} \int d^3r' \; \vec{j}(\vec{r}') \times \vec{\nabla}_r \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \qquad (3.9)$$

Wir vertauschen $\vec{j}(\vec{r}')$ und $\vec{\nabla}_r$: $\vec{j}(\vec{r}') \times \vec{\nabla}_r = -\vec{\nabla}_r \times \vec{j}(\vec{r}')$ und es folgt

$$\boxed{\vec{B}(\vec{r}) = \vec{\nabla}_r \times \int d^3r' \; \vec{j}(\vec{r}') \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}}, \qquad (3.10)$$

das Magnetfeld ist die Rotation eines Vektorpotentials

$$\boxed{\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{c} \int d^3r' \; \vec{j}(\vec{r}') \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \qquad (3.11)}$$

mit

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \qquad (3.12)$$

Für das elektr. Feld mit $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi$ folgte $\vec{\nabla}\times\vec{E} = 0$. Für das magnetische Feld folgt aus Gl. (3.12) analog

$$\boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0}, \qquad (3.13)$$

das magn. Feld ist quellenfrei! Wir wissen schon aus der Definition (3.10), daß es vom Strom $\vec{j}$ erzeugt wird. In der Tat ist $\vec{\nabla}\times\vec{B} \parallel \vec{j}/c$, und es folgt mit

$$\vec{\nabla}_r \times \left(\vec{\nabla}_r \times \vec{j}(\vec{r}\,')\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right) = -\vec{\nabla}_r^2\, \vec{j}(\vec{r}\,')\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} + \left(\vec{\nabla}_r\cdot \vec{j}(\vec{r}\,')\vec{\nabla}_r \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right)$$

$$\text{mit} \quad \vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{b}\,(\vec{a}\cdot\vec{c}) - \vec{c}\,(\vec{a}\vec{b}) \qquad (3.14)$$

$$= 4\pi\, \vec{j}(\vec{r}\,')\,\delta(\vec{r}-\vec{r}\,') + \vec{\nabla}_r\left[\vec{j}(\vec{r}\,')\vec{\nabla}_r \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right]$$

Im letzten Term können wir $\vec{\nabla}_r \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = -\vec{\nabla}_{r'} \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$ verwenden und damit

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \frac{4\pi}{c}\,\vec{j} - \vec{\nabla}_r \int d^3r'\, \vec{j}(\vec{r}\,')\vec{\nabla}_{r'} \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$$

$$= \frac{4\pi}{c}\,\vec{j} + \vec{\nabla}_r \int d^3r' \underbrace{\left(\vec{\nabla}_{r'}\, \vec{j}(\vec{r}\,')\right)}_{0} \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \qquad (3.15)$$

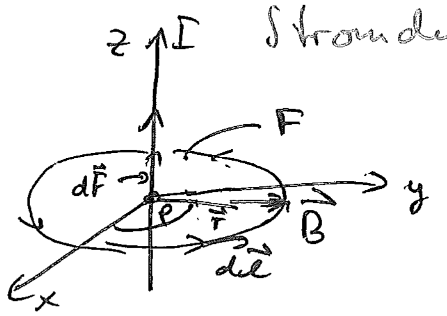
Es folgen die Grundgleichungen der Magnetostatik, Gl. (3.13) & (3.15):

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \frac{4\pi}{c}\,\vec{j} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \end{aligned}} \qquad (3.16)$$

Gl. (3.16) bedeutet, daß das magn. Feld quellenfrei ist (siehe (3.13)), und daß die 'Wirbel' des magn. Feldes durch die Stromdichte gegeben sind.

Beispiel:

Stromdurchflossener Leiter



$$\vec{B} = B(\rho)\cdot \hat{e}_\varphi$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

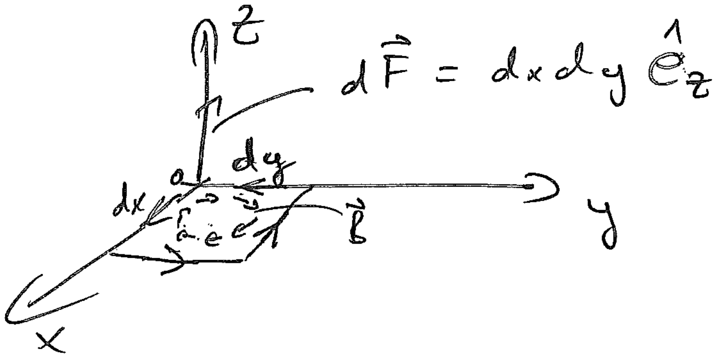
$$\int_F (\vec{\nabla}\times\vec{B})\, d\vec{F} = \frac{4\pi}{c}\int_F \underset{\uparrow\ \frac{I}{F}\cdot\hat{e}_z}{\vec{j}}\, d\vec{F} = \frac{4\pi}{c}\, I \qquad (3.17)$$

Nach dem Stokesschen Satz gilt

$$\int_F \vec{\nabla}\times\vec{B}\, d\vec{F} = \int_{\partial F} \vec{B}\cdot d\vec{l} \qquad (3.18)$$

Stokesscher Satz:

Wie beim Gaußschen Satz, (Seite 6a-6b) betrachten wir ein infinitesimales Gebiet, eine Fläche dF und



ein beliebiges Vektorfeld $\vec{B}$.

$$\int \vec{\nabla}\times\vec{B}\, d\vec{F} = \int (\vec{\nabla}\times\vec{B})\cdot\hat{e}_z\, dx\, dy$$
$$= \int \left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y}\right) dx\, dy \qquad (3.19)$$

Dies lässt sich umschreiben als

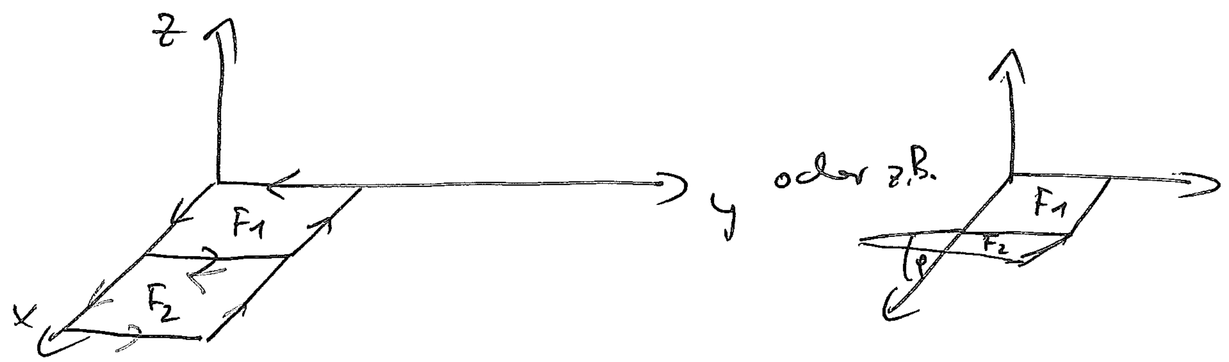
$$\int dy \left(\int_0^{0+dx} dx \frac{\partial B_y}{\partial x}\right) - \int dx \left(\int_0^{0+dy} dy \frac{\partial B_x}{\partial y}\right)$$

$$= \int dy \Big(B_y(0+dx, y, 0) - B(0,y,0)\Big) - \int dx \Big(B_x(x, 0+dy, 0) - B_x(x,0,0)\Big)$$

$$= \int_{\partial F} d\vec{l}\cdot\vec{B} \qquad (3.20)$$

d.h., infinitesimal gilt der Satz von Stokes.

Wie beim Satz von Gauß lässt sich eine beliebige Fläche aus infinitesimalen Quadraten überdecken; für zwei gilt



In jedem der Flächen gilt $\int\limits_{F_i} (\vec{\nabla} \times \vec{B}) d\vec{F} = \int\limits_{\partial F_i} \vec{B}\, d\vec{l}$

und damit

$$\int\limits_{F=F_1+F_2} (\vec{\nabla} \times \vec{B}) d\vec{F} = \int\limits_{F_1} \vec{\nabla} \times \vec{B}\, dF + \int\limits_{F_2} \vec{\nabla} \times \vec{B}\, dF$$

$$= \int\limits_{\partial F_1} \vec{B}\, d\vec{l} + \int\limits_{\partial F_2} \vec{B}\, d\vec{l} = \int\limits_{\partial (F_1+F_2)} \vec{B}\, d\vec{l} \qquad (3.21)$$

oder allgemein

$$\boxed{\int\limits_{F} \vec{\nabla} \times \vec{B} \cdot d\vec{F} = \int\limits_{\partial F} \vec{B} \cdot d\vec{l}} \qquad (3.22)$$

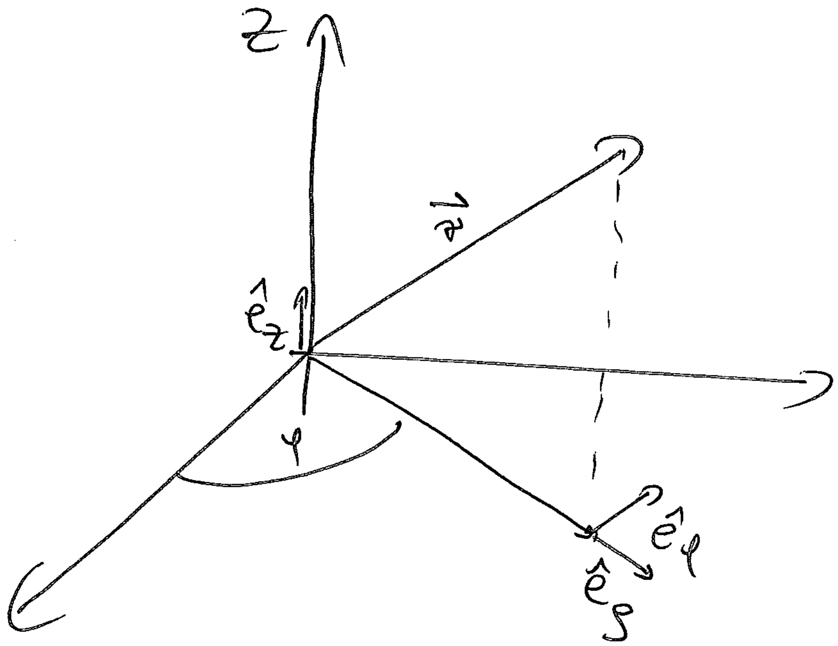
und damit

$$\underbrace{\int_{\partial F} \vec{B} \cdot d\vec{l}}_{= 2\pi B(\rho)\cdot\rho} = \frac{4\pi}{c} I \qquad (3.23)$$

oder

$$\boxed{B = \frac{1}{c}\frac{2I}{\rho}.}$$

Im Beispiel haben wir Zylinderkoordinaten benutzt, (ρ, φ, z):



mit $x = \rho \cdot \cos\varphi$ und den Einheitsvektoren
$y = \rho \cdot \sin\varphi$
$z = z$

$$\hat{e}_\rho = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\hat{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$