3.3 Eichfreiheit & Coulombeichung

In Gl. (3.11) haben wir das Vektorpotential $\vec{A}$ mit (siehe (3.13))

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \tag{3.24}$$

eingeführt. Es folgte sofort $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$. Die physikalische, observable Größe ist das Magnetfeld $\vec{B}$! Die inhomogene Gleichung $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}$ lässt sich mit $\vec{A}$ auch als

$$-\Delta \vec{A} + \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) = \frac{4\pi}{c} \vec{j} \tag{3.25}$$

schreiben ($\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \Delta \vec{A}$). Nun benutzen wir daß

$$\vec{A} \to \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} \omega \tag{3.26}$$

das Magnetfeld $\vec{B}$ nicht ändert,

$$\vec{\nabla} \times \vec{A}' = \vec{\nabla} \times \vec{A} + \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \omega = \vec{\nabla} \times \vec{A}, \tag{3.27}$$

d.h., das Vektorfeld $\vec{A}$ ist nur bis auf eine

Fkt. $\vec{\nabla}\omega$ durch das Magnetfeld bestimmt.

Mit $\vec{A}'$ lässt sich die inhomogene Gleichung als

$$-\Delta \vec{A}' + \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}') = \frac{4\pi}{c}\vec{j} \qquad (3.28)$$

schreiben. Nun wählen wir ω so, daß

$$\boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{A}' = 0} \qquad (3.29)$$

Gl. (3.29) ist die Coulombeichung. Sie kann

erfüllt werden wg. $\vec{\nabla}\vec{A}' = \Delta\omega + \vec{\nabla}\vec{A} = 0$

und der Wahl $\qquad (3.30)$

$$\omega(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi}\int d^3r'\, G(r,r')\,\vec{\nabla}_{r'}\vec{A}(r')$$

mit Greenscher Fkt. G, siehe Gl. (2.52), (Δ ist invertierbar).

Es folgt

$$\boxed{\Delta\vec{A} = -\frac{4\pi}{c}\vec{j}(\vec{r}) \quad \text{für } \vec{\nabla}\vec{A} = 0} \qquad (3.31)$$

und damit

$$A(\vec{r}) = \frac{1}{c}\int \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\, d^3r' \qquad (3.32)$$

für Dirichletrandbedingungen im $\mathbb{R}^3$; $\vec{A}(r\to\infty) = 0$.