4.4 Spezielle Relativitätstheorie

Wir hatten die Maxwellgleichungen ohne den Bezug auf ein spezielles Koordinatensystem (z.B. das Labor) hergeleitet. In der Tat hatten wir beim Faradayschen Induktionsgesetz implizit mit der Invarianz der Grundgleichungen bei einer Verschiebung des Koordinatensystems mit konst. Geschwindigkeit ($\vec{v}$) argumentiert, siehe S. 62 ff. (mit einer Redefinition von $\vec{E}$).

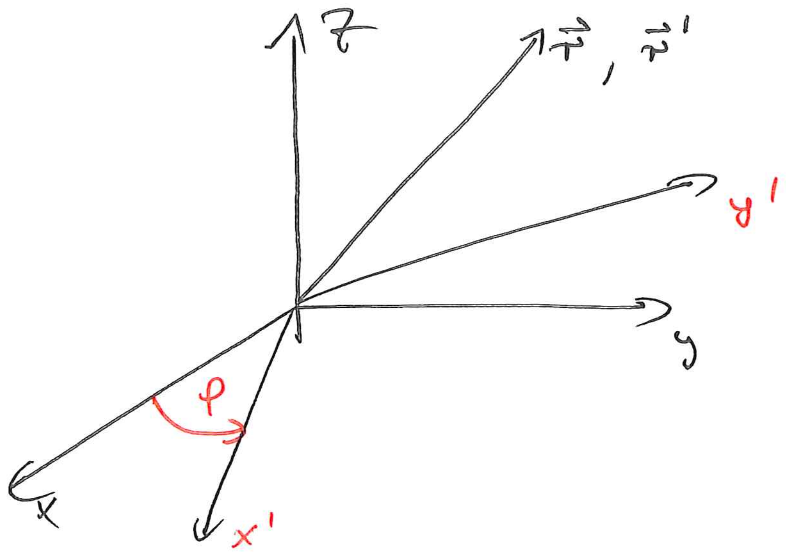
Postulieren wir diese Invarianz der Maxwellgl., so können wir damit 'erlaubte' Koordinatentransf. definieren. Wir werden sehen, daß das gerade die Lorentztrafos. sind, die aus den Grundpostulaten der Speziellen Relativitätstheorie (SRT) folgen:

(1) Die physikal. Gesetze (und damit Exper.) sind unabhängig von Translationsbewegungen des Koordinatensystems. Äquivalente Koord.systeme nennt man Inertialsysteme. (Relativitätsprinz

(2) Die Lichtgeschwindigkeit ist unabhängig von der Geschwindigkeit der Lichtquelle.

Wir beginnen mit einfachen Überlegungen zum ersten Postulat, und zu seiner Verbindung mit den Maxwellgl..

Wir hatten bei der Wahl der Koordinatensyst. in der Elektro- und Magnetostatik schon mehrfach benutzt, daß die physik. Gesetze unabhängig von der Ausrichtung des Koord.systems sind, z.B.



mit $x' = x\cos\varphi + y\sin\varphi$

$y' = y\cos\varphi - x\sin\varphi$

$z' = z$

Das bedeutet, daß die neuen Koordinaten $\vec{r}\,'$ eines gegebenen Vektors durch

$$\vec{r}\,' = R\vec{r} \quad \text{mit} \quad R = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \tag{4.51}$$

gegeben sind. Betrachten wir nun ein Problem in der Elektrostatik mit der Poissongleichung

$$\Delta\phi(\vec{r}) = -4\pi\rho(\vec{r})$$

siehe (2.36), S. 21, so ist das invariant unter dieser Rotation:

$$\Delta(r) = \Delta(\vec{r}\,')$$

$$\phi(r) = \phi'(\vec{r}\,') \tag{4.52}$$

$$\rho(\vec{r}) = \rho'(\vec{r}\,')$$

mit

$$\Delta'\phi'(\vec{r}\,') = -4\pi\rho'(\vec{r}\,')$$

Hier haben wir benutzt, daß es sich um eine <u>konstante</u> Drehung handelt,

$$\vec{\nabla} \varphi = 0$$

Dann gilt

$$\vec{\nabla}\,' = R \vec{\nabla}$$

Dies läßt sich leicht durch

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial x'}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial y'}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y'} = \cos\varphi \frac{\partial}{\partial x'} - \sin\varphi \frac{\partial}{\partial y'}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \sin\varphi \frac{\partial}{\partial x'} + \cos\varphi \frac{\partial}{\partial y}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{\nabla} = R^T \vec{\nabla}\,'$$

zeigen. Es gilt $\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \vec{\nabla}^T \vec{\nabla} = \Delta$

$$\vec{\nabla}' \cdot \vec{\nabla}' = \vec{\nabla}'^T \vec{\nabla}' = \vec{\nabla}^T \underbrace{R^T R}_{\mathbb{1} \text{ da } R \text{ Drehung}} \vec{\nabla} = \vec{\nabla}^T \vec{\nabla} = \Delta$$

Natürlich verändert ein Drehung die Richtung eines Vektors im Koordinatensystem, jedoch nicht seinen Betrag, oder allgemein

$$\vec{v} \cdot \vec{w} \xrightarrow{R} \vec{v}' \cdot \vec{w}' = \vec{v}^T \underbrace{R^T R}_{\mathbb{1}} \vec{w} = \vec{v} \cdot \vec{w} \qquad (4.53)$$

Skalarprodukt

In der speziellen Relativitätstheorie suchen wir nun Transformationen, die die Postulate (1), (2) erfüllen. Im letzten Kapitel hatten wir gesehen, daß sich elektromagn. Wellen mit Lichtgeschwindigkeit ausbreiten, siehe Gl. 4.50 : $\omega = c\sqrt{\vec{k}^2}$. Dies war die Folge der Wellengleichung mit dem Diff. op. $\Box = \frac{\partial^2}{\partial(ct)^2} - \vec{\nabla}^2$. Offensichtlich muß $\Box$ invariant bleiben, oder die Relation $\omega^2 = c\,\vec{k}^2$.

Dies legt nahe, ein 4-dim Koordinatensystem einzuführen.

Wir definieren

$$(x^\mu) = (x^0, \vec{x}) \qquad \text{mit } x^0 = ct \qquad (4.54)$$

$$\mu = 0, 1,2,3 \qquad (x^i) = (x,y,z)$$

Das Skalarprodukt

$$x \cdot x = x^{0\,2} - \vec{x}^{\,2} \qquad (4.55)$$

ist mit einem relat. Minuszeichen zwischen räumlichen und zeitlichen Teil definiert und läßt sich mit Hilfe des metrischen Tensors

$$\eta = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix} \qquad (4.56)$$

Metrik des Minkowskiraums

als

$$x \cdot x = x^T \eta x$$

schreiben, oder

$$x \cdot x = x^\mu \eta_{\mu\nu} x^\nu = x^\mu x_\mu \qquad (4.57)$$

$$\text{mit } x_\mu := \eta_{\mu\nu} x^\nu$$

Dies definiert kontravariante, x^μ, und kovariante, x_μ, Vektoren.

Unser Eingangsbeispiel mit der Rotation im 3dim Raum ($x^0=0$) weist dann $x^\mu(x^0=0)=(0,\vec{x})$ die Rolle des Vektors, und $x_\mu(x^0=0)=(0,-\vec{x})$ die Rolle des dualen transponierten Vektors zu. Unter Drehungen transformieren sie mit R und R^T!

Wir haben im allgemeinen

$$\omega^T(\omega^0=0)\,\eta\,v(v^0=0) = \vec{\omega}^T\vec{v}$$

und

$$\begin{aligned} \vec{\omega}^T &\xrightarrow{R} \vec{\omega}^T R^T \\ \vec{v} &\xrightarrow{R} R\,\vec{v} \end{aligned} \qquad (4.58)$$

Der <u>D'Alembert</u> operator $\Box = -\frac{\partial^2}{\partial(ct)^2}+\Delta = -\frac{\partial^2}{\partial x^{02}}+\Delta$ lässt sich entsprechend schreiben als

$$\Box = -\frac{\partial}{\partial x_\mu}\,\eta_{\mu\nu}\,\frac{\partial}{\partial x_\nu} \qquad (4.59)$$

Frage: Warum ist

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu} \qquad ?$$

Wir suchen nun nach Invarianzen des Skalarproduktes

$$x \circ y = x^\nu y_\nu \qquad (4.60)$$

Wir hatten schon gesehen, daß dieses Skalarprodukt unter Drehungen invariant ist, wg. $R^T R = \mathbb{1}$, genauer gesagt, unter

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix} \qquad (4.61)$$

Wir suchen jetzt allgemeine Transformationen

$$(\Lambda, a) : x \to \Lambda x + a \qquad (4.62)$$

die das Skalarprodukt von Differenzen (Distanzen) invariant lassen,

$$(x-y)\circ(x-y) \xrightarrow{(\Lambda,a)} (x-y)\circ(x-y) \qquad (4.63)$$

Für $(0,a)$ ist (5.63) evident, wir beschränken uns daher auf $(\Lambda, 0)$.

Dann gilt

$$(x-y)\circ(x-y) \to [\Lambda(x-y)]\circ\Lambda(x-y)$$

$$= (x-y)\,\Lambda^T \eta\, \Lambda\,(x-y) \overset{!}{=} (x-y)\circ(x-y) \qquad (4.64)$$

Das bedeutet

$$\boxed{\Lambda^T \eta \Lambda = \eta} \qquad (4.65)$$

da (5.64) für beliebige $(x-y)$ gelten soll.

Gl. (5.65) liest sich in Indizes

$$\boxed{\eta_{\mu\nu}\, \Lambda^\mu{}_\rho\, \Lambda^\nu{}_\sigma = \eta_{\rho\sigma}} \qquad (4.66)$$

Zusammenfassend haben wir die Poincaré-transform.

$$\boxed{x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu} + a^{\mu}} \qquad (4.68)$$

siehe S. 84, Gl. (4.62) / Th. S. 10 Gl (4.66), die Abstände

$$d(x,y) = (x-y)^2 \qquad (4.69)$$

invariant lassen. Die Lorentztransformationen $x \to \Lambda \cdot x$ erfüllen Gl. (4.66).

Die Abstände d unterteilen den Minkowskiraum in drei Gebiete: $z = x - y$

(1) $z^2 > 0$: zeitartig, z.b. $z = (z^0, \vec{0})$

(2) $z^2 < 0$: raumartig, z.b. $z = (0, \vec{z})$

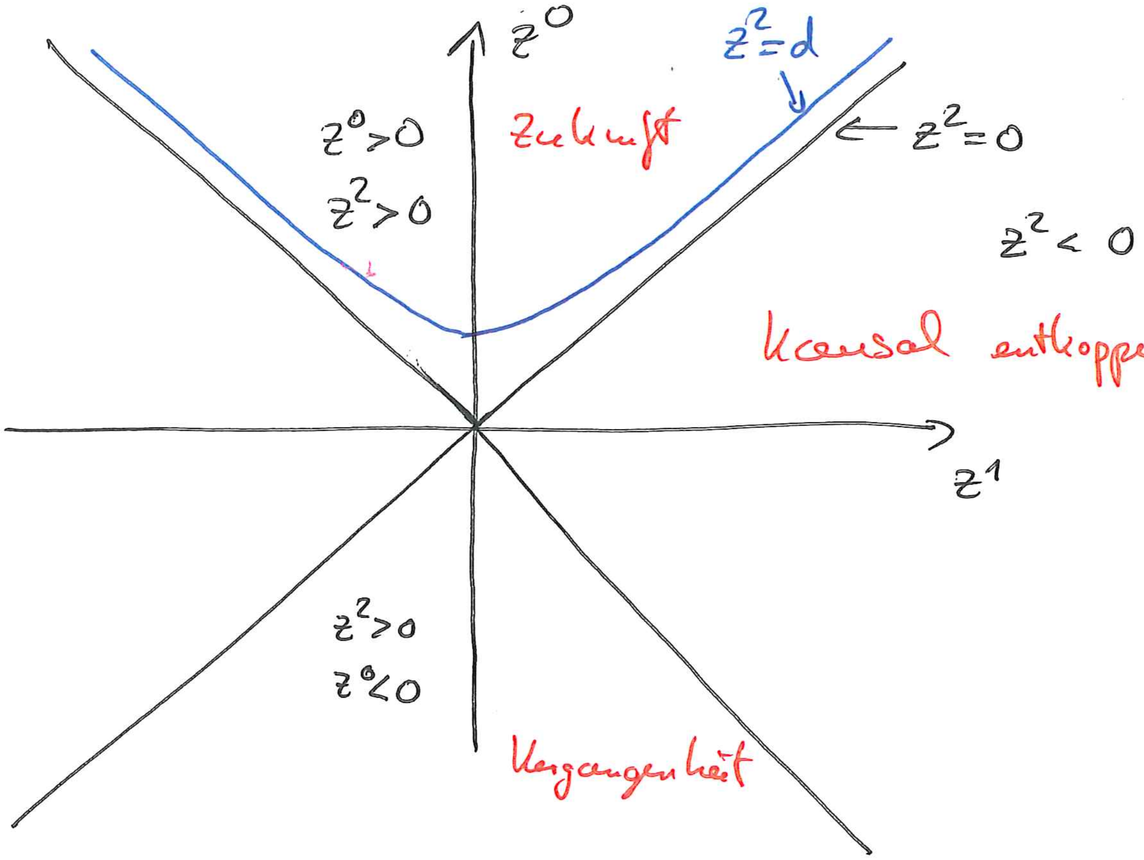
(3) $z^2 = 0$: lichtartig, z.b. $z = (z^0, z^0, 0, 0)$

(4.70)

Lichtartige Vektoren definieren eine hyperbolische Oberfläche

$$x^{0\,2} = \vec{x}^{\,2}, \qquad (4.71)$$

den Lichtkegel.



Zwei Vektoren z und z' mit $z^2 = z'^2$ können durch eine Lorentztransformation ineinander transformiert werden: Es gilt im obigen Bild

$$z'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu z^\nu \tag{4.72}$$

mit Boost

$$\begin{pmatrix} z^{0\prime} \\ z^{1\prime} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z^0 \\ z^1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Inertialsystem I' Inertialsyst. I

mit $\Lambda^T \eta \cdot \Lambda = \eta$:

$$\begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{4.73}$$

Damit gilt

$$\begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & & 0 \\ \gamma\beta & -\gamma & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma^2(1-\beta^2) & 0 & & 0 \\ 0 & -\gamma^2(1-\beta^2) & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$$

und es folgt

$$\gamma^2(1-\beta^2) = 1 \Rightarrow \gamma^2 = \frac{1}{1-\beta^2} \boxed{\geq 0} \tag{4.74}$$

$$\boxed{\beta^2 < 1}$$

Mit dieser Notation ergibt sich

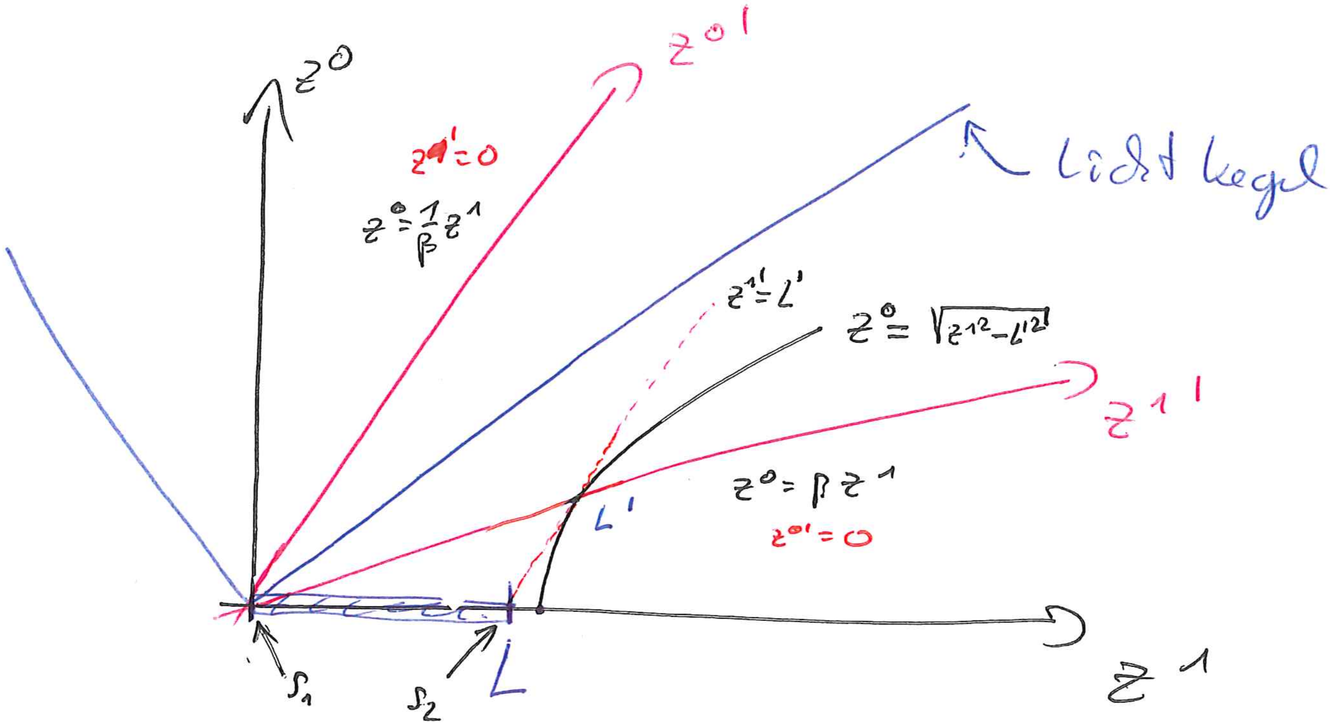
$$\begin{aligned} z^{0'} &= \gamma z^0 - \gamma\beta z^1 \\ z^{1'} &= -\gamma\beta z^0 + \gamma z^1 \end{aligned} \tag{4.75}$$

was für $\beta < 1$ immer gelöst werden kann. Sei nun $z = (z^0, \vec{0})$ der Ortvektor eines ruhenden Beobachters im In. syst. I.

$$z^{0'} = \gamma z^0, \quad z^{1'} = -\gamma\beta z^0 = -\beta z^{0'}. \tag{4.76}$$

Die Geschwindigkeit $v/c = \frac{\partial z^{1'}}{\partial z^{0'}}$ des Punktteilchens im Inert. system I' ist

$$v = -c\cdot\beta \Leftrightarrow \beta = -v/c \tag{4.77}$$



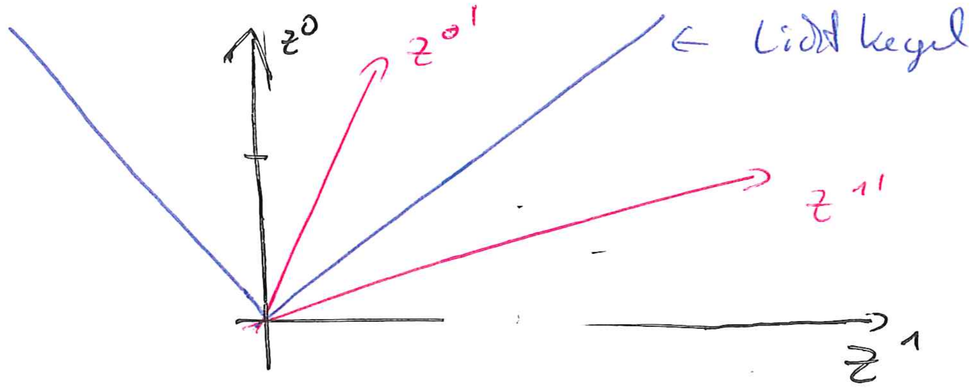
$z^{0'}$-Achse: $z^{1'} = 0$:

Gl. (4.75): $z^0 = 1/\beta \, z^1$

$z^{1'}$-Achse: $z^{0'} = 0$:

Gl. (4.75): $z^0 = \beta z^1$

Längenkontraktion (siehe auch S. 93 & Übungen) d.h., das gestrichene Inertialsystem bewegt sich gegenüber dem ungestrichenen mit der Geschwindigkeit v.



siehe S. 88a

Das Transformationsgesetz (4.75) läßt sich leicht auf Boosts in beliebige Richtungen verallgemeinern. Sei

$$\vec{\beta} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1/c \\ v_2/c \\ v_3/c \end{pmatrix} \qquad (4.78)$$

ein Boost in Richtung $\hat{\beta} = \vec{\beta}/|\vec{\beta}|$. Wg der Rotationsinvarianz läßt sich $\hat{\beta}$ in z_1-Richtung legen und wir sind wieder bei (4.75). D.h., der Vektor $\vec{z}_\perp$ mit $\vec{z}_\perp \cdot \hat{\beta} = 0$ ändern sich nicht, der Vektor in Richtung von $\hat{\beta}$, $\vec{z}_\parallel$ $\left(\vec{z} = \underset{= (\vec{z}\cdot\hat{\beta})}{z_\parallel} \cdot \hat{\beta} + \vec{z}_\perp\right)$ ändert sich mit (4.75).

Es folgt (Lorentztrafo siehe 90a)

$$\boxed{\begin{aligned} z^{0\prime} &= \gamma\left(z^0 - \vec{\beta}\cdot\vec{z}\right) \\ \vec{z}^{\,\prime} &= -\gamma\,\vec{\beta}\,z^0 + \vec{z} + \frac{\gamma-1}{\vec{\beta}^2}\left(\vec{\beta}\cdot\vec{z}\right)\vec{\beta} \end{aligned}} \qquad (4.79)$$

Wir folgern, daß die Lorentztransformationen durch sechs Parameter $(\vec{\beta}, \vec{\omega})$ bestimmt sind, 3 Boostparameter & 3 Drehwinkel.

Mit dem Beweis der Behauptung $z' = \Lambda z$ für $z^2 = z'^2$ ergibt sich ein einfaches Bild der 3 Gebiete mit $z^2 \gtreqqless 0$, Gl. (4.70) auf S. 86:

1) Zeitartige Ereignisse, $z^2 > 0$ lassen sich auf die Form $z = (z^0, \vec{0})$ bringen; d.h., es gibt ein Koord. system, in dem sie am gleichen Ort, $\vec{z} = \vec{x} - \vec{y} = 0$, stattfinden aber nacheinander, $z^0 \neq 0$: Sie sind kausal miteinander verknüpft.

Die zu Gl. (4.79) verbundene Lorentztransformations matrix ist

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma \beta_j \\ -\gamma \vec{\beta}_i & \delta_{ij} + \dfrac{\gamma - 1}{\vec{\beta}^2} \beta_i \beta_j \end{pmatrix}$$

(2) Raumartige Ereignisse, $z^2 < 0$, lassen sich auf die Form $z = (0, \vec{z})$ bringen; d.h., es gibt ein Koordinatensystem, in dem sie gleichzeitig, aber an verschiedenen Orten, $\vec{z} = \vec{x} - \vec{y} \neq 0$, stattfinden: Sie sind kausal separiert.

(3) Lichtartige Ereignisse, $z^2 = 0$ bewegen sich mit Lichtgeschwindigkeit in jedem Koordinatensystem, sie haben die Form (nach Rotation)

$$z = (z^0, \pm z^0, 0, 0) \qquad (4.80)$$

und damit $\quad v/c = \dfrac{\partial z^0}{\partial z^1} = \pm 1.$

Obwohl die Boosts sehr analog zu den Drehungen beschrieben werden können, führen sie zu völlig unterschiedlichen Effekten, insbesondere der Zeitdilatation und der Längenkontraktion.

Betrachten wir zuerst eine Uhr, die in einem Inertialsys. I ruht. Diese misst Zeitintervalle

$$\Delta t = \sqrt{dt^2} \qquad (4.81)$$

zwischen zwei "Ticks". Gl. (4.81) ist offensichtlich nicht invariant unter einem Wechsel des In. systems. Eine invariante Zeitdefinition ergibt sich aus (4.81) (eindeutig) mit

$$c\, d\tau = \sqrt{(dx^0)^2 - (d\vec{x})^2} \overset{d\vec{x}=0}{=} c\,\Delta t \qquad (4.82)$$

In einem gegenüber I mit v geboosteten Inertialsystem I' ergibt sich

$$\boxed{\begin{aligned}\Delta t' = \sqrt{dt'^2} &\underset{(4.75),(4.79)}{=} \sqrt{\gamma^2\, dt^2} \\ &= \gamma\,\Delta t\end{aligned}} \qquad (4.83)$$

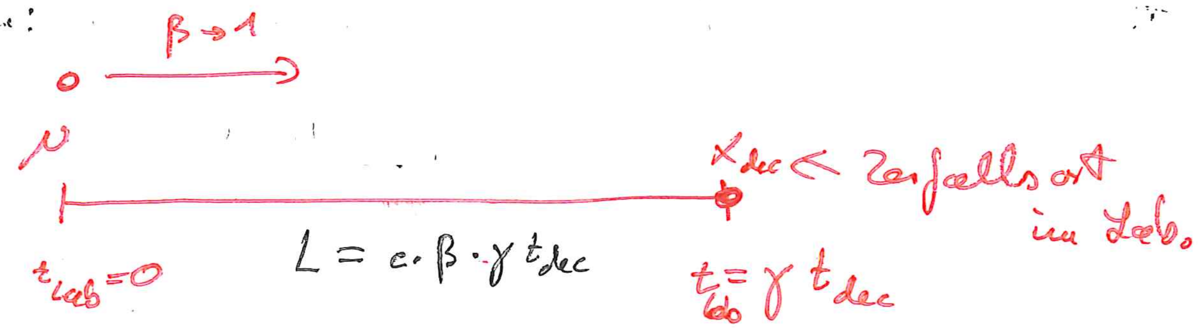
mit $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\vec{\beta}^2}} > 1$. Ein Beobachter in I', der eine mit $\beta = v/c$ bewegte Uhr sieht, mißt ein größeres Zeitintervall zwischen den Schlägen.

Die Eigenzeit hingegen ist, per Definition, identisch.

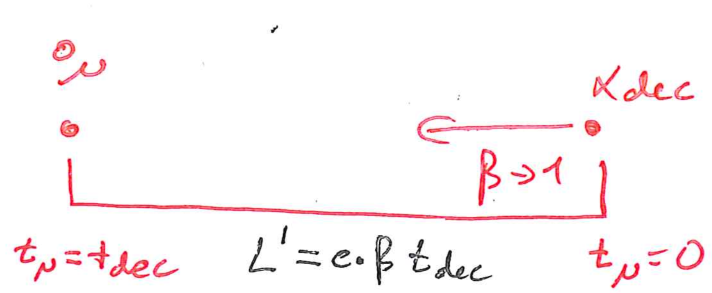
$$c\,d\tau' = \sqrt{(dx^{0\prime})^2 - d\vec{x}'^2} = c\,d\tau \qquad (4.84)$$

Diese Zeitdilatation kann sehr schön zum Beispiel an der kosmischen Strahlung gemessen werden. Zum Beispiel hat ein Myon eine Zerfallszeit von $t_{dec} \sim 2\,\mu s$. Durch die Zeitdilatation legen sie bei hohen Geschwindigkeiten $\beta \to 1$ eine größere Strecke L als $v \cdot t_{dec}$ zurück. Im Ruhesystem des Myons zerfällt es allerdings nach $\tau = t_{dec} \sim 2\,\mu s$.

Laborsystem:



Ruhesystem des Myons:



Wir sehen sofort, daß der Beobachter im Ruhesystem des Myons eine Strecke der Länge

$$L' = \frac{1}{\gamma} L = \sqrt{1-\beta^2}\, L \qquad (4.85)$$

misst. Dies nennt man Längenkontraktion:

Bewegte, räumliche Objekte erscheinen in Richtung der Geschwindigkeit $\vec{v}$ kontrahiert um $\sqrt{1-\beta^2}$.

Obige Phänomene lassen sich sehr gut in der kosmischen Strahlung (siehe oben), oder Beschleunigerexperimenten (z.B. LHC) beobachten. Hier ist es üblich, die (Schwerpunkts)energie eines Systems anzugeben woraus sich leicht die Parameter β, γ bestimmen lassen, mit Hilfe der relat. Lagrange fkt.

Die Wirkung eines freien relat. Punktteilchens ist notwendigerweise Lorentzinvariant, und kann als Integral über die Eigenzeit geschrieben werden:

siehe Gl. (4.82), S. 92

$$S = -\overset{\substack{\text{Masse im Ruhesyst.}\\ \downarrow}}{m}c^2 \int d\tau \tag{4.86}$$

$$= -mc^2 \int dt \sqrt{1 - \frac{1}{c^2}\frac{d\vec{x}^2}{dt^2}}$$

$$= -mc^2 \int dt \sqrt{1 - \vec{v}^2/c^2}$$

mit $\vec{v} = \frac{d\vec{x}}{dt}$. Im nicht relativistischen Limes, $\vec{v}^2/c^2 \ll 1$, ergibt sich aus (4.86)

$$S = -mc^2 \int dt \left(1 - \frac{1}{2}\vec{v}^2/c^2 + \mathcal{O}\left(\left(\vec{v}^2/c^2\right)^2\right)\right)$$

$$= \int dt \underbrace{\Big[\overset{-U}{-mc^2} + \overset{T}{\tfrac{1}{2}m\vec{v}^2} + \ldots\Big]}_{L = T - U}. \tag{4.87}$$

Der Impuls ergibt sich als

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial v_i} = \frac{m v_i}{\sqrt{1 - \vec{v}^2/c^2}} = \gamma \cdot m\vec{v}, \tag{4.88}$$

mit nicht relat. Limes $\vec{p} \xrightarrow{\gamma \to 1} m\vec{v}$.

Die Energie (Hamiltonfkt.) ist durch

$$E = \vec{p}\cdot\vec{v} - L \tag{4.89}$$

gegeben. Mit (4.88) und (4.87) folgt

$$E = \gamma m \vec{v}^{\,2} + mc^2/\gamma$$

$$= \gamma\left(m\vec{v}^{\,2} + mc^2/\gamma^2\right) = \gamma\left(\cancel{m\vec{v}^{\,2}} + mc^2\left(1 - \cancel{\vec{v}^{\,2}}/c^2\right)\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{E = \gamma m c^2} \tag{4.90}$$

Die Gleichung (4.90) erlaubt es nun, für gegebene Beschleunigerenergien den γ-Faktor und damit die Geschwindigkeit auszurechnen.

LHC (Large Hadron Collider)

Proton-Proton Beschleuniger : p : $m = 1.67 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}$

$= 938.\ \mathrm{MeV}/c^2$

Schwerpunktsenergie : $\sim 7\ \mathrm{TeV}$

geplant: $\sim 14\ \mathrm{TeV}$

Das bedeutet, daß

$$E_{proton} = 3.5 - 7\ \mathrm{TeV}$$

$$E_{ruhe} = 0.938\ \mathrm{GeV}$$

und damit

$$\gamma = \frac{E_{proton}}{E_{ruhe}} \simeq 3730 - 7460$$

also

$$|\vec{v}| \simeq (\underset{3.5\,\mathrm{TeV}}{0.9999999} - \underset{7\,\mathrm{TeV}}{0.99999999})c \qquad (4.91)$$

Ein sogenannter bunch (im Ring sind ~2800 bunches) hat die Parameter:

	3.5 TeV	7 TeV
bunch length:	~ 6 cm	7.5 cm
protonen/bunch:		$1.15 \cdot 10^{11}$
# bunches:		2808
beam energy:		$2808 \cdot 1.15 \cdot 10^{11} \cdot 7\ \mathrm{TeV} \simeq 362\ \mathrm{MJ}$

Vergleich: ICE3 mit 420 t und 43 m/s $\simeq$ 153 km/h