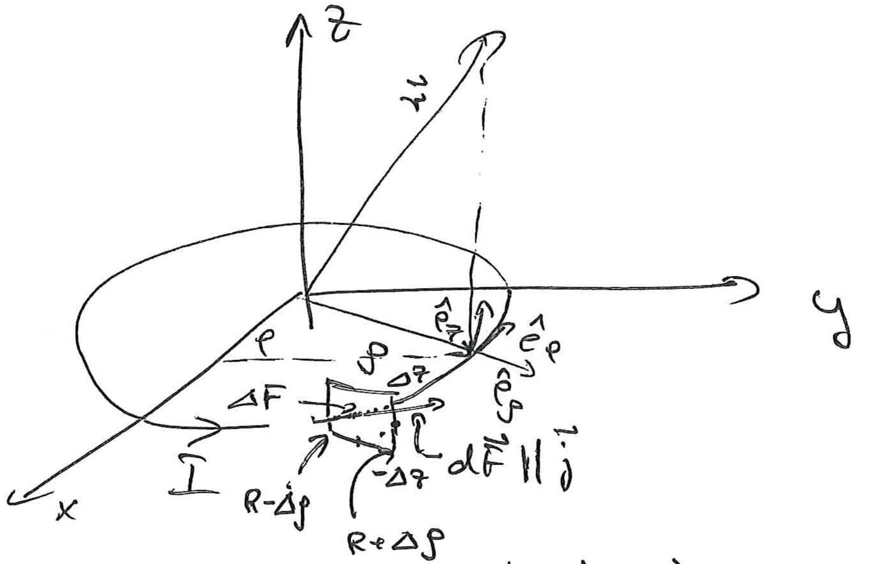
3.5 Magnetfeld eines Kreisstroms

Wir legen den Kreisstrom in die x-y Ebene,



In dieser Situation hat $\vec{j}$ nur Komponenten in der x-y Ebene; in Zylinder koord, siehe S. 47, gilt mit

$$\vec{j} = \sum_i j_i \hat{e}_i \quad , \quad (\hat{e}_i) = (\hat{e}_\rho, \hat{e}_\varphi, \hat{e}_z) \tag{3.35}$$

daß

$$j_z = 0 = j_\rho \quad , \quad j_\varphi = I \cdot \delta(\rho - R)\,\delta(z)$$

Der Strom folgt mit

$$\int_{\Delta F} \vec{j}\, d\vec{F} = \int_{-\Delta z}^{\Delta z} dz \int_{R-\Delta\rho}^{R+\Delta\rho} d\rho\, j_\varphi = I \tag{3.36}$$

Mit der Stromdichte $\vec{j}$ kann das Vektorpot.

berechnet werden. In Coulombeichung, $\vec{\nabla}\vec{A}=0$, benutzen wir Gl. (3.32) und es folgt

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{c}\int d^3r' \, \frac{\vec{j}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = \frac{I}{c}\int_{-\infty}^{\infty} dz' \int_0^{\infty} d\rho' \int_0^{2\pi} d\varphi' \, \rho' \, \frac{\delta(\rho'-R)\,\delta(z')\,\hat{e}_\varphi}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \tag{3.37}$$

mit

$$d^3r' = \underbrace{J(\rho,\varphi,z)}_{\text{Jacobidet.}\ \det\frac{\partial(\rho,\varphi,z)}{\partial(x,y,z)}} \, d\rho' \, d\varphi' \, dz'$$

und

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} \rho\cos\varphi \\ \rho\sin\varphi \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow |\vec{r}-\vec{r}\,'| = \Big[(\rho\cos\varphi-\rho'\cos\varphi')^2 + (\rho\sin\varphi-\rho'\sin\varphi')^2 + (z-z')^2\Big]^{1/2}$$

Die ρ' und z' Integrationen sind wg. der δ-Fktnen leicht aus zu führen und es gilt

$$\vec{A}(\rho,\varphi,z) = \frac{I}{c} R \int_0^{2\pi} d\varphi' \, \frac{\hat{e}_{\varphi'}}{\Big[\underbrace{(\rho\cos\varphi - R\cos\varphi')^2 + (\rho\sin\varphi - R\sin\varphi')^2}_{①} + z^2\Big]^{1/2}} \tag{3.38}$$

und

$$① = R^2\cos^2\varphi + \rho^2\cos^2\varphi' - 2\rho R\cos\varphi\cos\varphi' + \rho^2\sin^2\varphi + R^2\sin^2\varphi' - 2\rho R\sin\varphi\sin\varphi')$$

$$= \rho^2 + R^2 - 2\rho R\big(\underbrace{\cos\varphi\cos\varphi' + \sin\varphi\sin\varphi'}_{\cos(\varphi+\varphi')}\big)\big) = \rho^2 + R^2 - 2\rho R\cos(\varphi+\varphi') \tag{3.39}$$

mit dem Ergebnis

$$\vec{A}(\rho,\varphi,z) = \frac{IR}{c}\int_0^{2\pi} d\varphi' \frac{\hat{e}_{\varphi'}}{\left[\rho^2+R^2-2\rho R\cos(\varphi-\varphi') + z^2\right]^{1/2}} \qquad (3.40)$$

Nun können wir o.B.d.A. φ frei wählen (Rotationssymm.)

Wir setzen $\varphi=0$ und damit $(\partial_\varphi \vec{A}=0)$

$$\vec{A}(\rho,z) = \frac{IR}{c}\int_0^{2\pi} d\varphi' \frac{\hat{e}_{\varphi'}}{\left[\rho^2+R^2-2\rho R\cos\varphi' + z^2\right]^{1/2}} \qquad (3.41)$$

mit $\vec{A}\cdot\hat{e}_z = 0$, wg. $\hat{e}_{\varphi'}\cdot\hat{e}_z = 0 \;\; \forall \varphi'$.

Des weiteren ist $\hat{e}_{\varphi'}\cdot\hat{e}_\rho = -\sin\varphi'$. Damit ist

$$A_\rho = \vec{A}\cdot\hat{e}_\rho = \frac{IR}{c}\int_0^{2\pi} d\varphi' \frac{-\sin\varphi'}{\left[\rho^2+R^2-2\rho R\cos\varphi' + z^2\right]^{1/2}}$$

$$= -\frac{IR}{c}\int_{-\pi}^{\pi} d\varphi' \frac{\sin\varphi'}{\left[\rho^2+R^2-2\rho R\cos\varphi' + z^2\right]^{1/2}} = 0 \qquad (3.42)$$

$\varphi' \to -\varphi'$ anti-sym.

$\varphi' \to -\varphi'$ symm

Es gibt nur eine nichtverschwindende Komponente, A_φ. Es gilt

$$A_\varphi = \vec{A}\cdot\hat{e}_\varphi = 2\frac{IR}{c}\int_0^{\pi} d\varphi' \frac{\cos\varphi'}{\left[\rho^2+R^2-2\rho R\cos\varphi' + z^2\right]^{1/2}} \qquad (3.43)$$

Gl. (3.43) kann mit Hilfe von Variablensubstitution in Form von elliptischen Integralen geschrieben werden.

Sei $\phi = \frac{\pi - \varphi'}{2}$, mit

$$d\varphi' = -2\, d\phi \,, \quad \cos\varphi' = 2\cos^2 \varphi'/2 - 1 = 2\sin^2\phi - 1 \tag{3.44}$$

und damit

$$A_\varphi(\rho,z) = -4\frac{IR}{c}\int_{\pi/2}^{0} d\phi\, \frac{2\sin^2\phi - 1}{\left[(\rho+R)^2 + z^2 - 4\rho R\sin^2\phi\right]^{1/2}}$$

$$= \frac{4IR}{c}\frac{1}{\sqrt{(\rho+R)^2+z^2}}\int_0^{\pi/2} d\phi\, \frac{2\sin^2\phi - 1}{\left[1 - k^2\sin^2\phi\right]^{1/2}} \tag{3.45}$$

mit $\boxed{k^2 = \frac{4\rho R}{(\rho+R)^2+z^2}} \leq 1$

Das führt zu dem Endergebnis

$$A_\varphi(\rho,z) = \frac{4IR}{c}\frac{1}{\sqrt{(\rho+R)^2+z^2}}\left\{\frac{2-k^2}{k^2}K(k) - \frac{2}{k^2}E(k)\right\}$$

mit den ellipt. Fkt.:

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} d\phi\, \frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}} \tag{3.46}$$

$$E(k) = \int_0^{\pi/2} d\phi\, \sqrt{1-k^2\sin^2\phi}$$

Gl. (3.46) kann für kleine $k \ll 1$ analytisch ausgewertet werden,

$$K(k) = \frac{\pi}{2}\left[1 + 2\,\frac{k^2}{8} + 9\left(\frac{k^2}{8}\right)^2 + \dots\right]$$

$$E(k) = \frac{\pi}{2}\left[1 - 2\,\frac{k^2}{8} - 3\left(\frac{k^2}{8}\right)^2 + \dots\right] \tag{3.47}$$

und damit

$$A_\varphi = 2\pi\frac{IR}{c}\frac{1}{\sqrt{(\rho+R)^2+z^2}}\left[\frac{2}{k^2}\big(K(k)-E(k)\big) - K(k)\right] \tag{3.48}$$

Die Bedingung $k \ll 1$ gilt für

$$z \gg \sqrt{4\rho R}, \quad R \gg \rho, \quad \rho \gg R \tag{3.49}$$

und es folgt

$$A_\varphi = 2\pi\frac{IR}{c}\frac{1}{\sqrt{(\rho+R)^2+z^2}}\left[\frac{2}{k^2}\left(\frac{k^2}{2} + 12\left(\frac{k^2}{8}\right)^2 + \dots\right) - \cancel{1} - \frac{k^2}{4} + O(k^4)\right]$$

$$= \frac{\pi}{4}\frac{IR}{c}\frac{1}{\sqrt{(\rho+R)^2+z^2}}\left[k^2 + O(k^4)\right] = \boxed{\frac{\pi I R^2}{c}\frac{\rho}{\left((\rho+R)^2+z^2\right)^{3/2}}} + O(k^4) \tag{3.50}$$

Für die Berechnung des magn. Feldes brauchen wir $\vec{\nabla}\times\vec{A}(\rho,\varphi,z)$. Wir benutzen, daß

$$\left.\frac{\partial}{\partial x}\right|_{y,z} f(\rho,\varphi,z) = \left(\left.\frac{\partial \rho}{\partial x}\right|_{y,z} \left.\frac{\partial}{\partial \rho}\right|_{\varphi,z} + \left.\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right|_{y,z} \left.\frac{\partial}{\partial \varphi}\right|_{\rho,z} + \overset{0}{\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{y,z}} \frac{\partial}{\partial z} \right) f(\rho,\varphi,z) \tag{3.56}$$

und, $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$, $\tan\varphi = y/x$

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \cos\varphi\,, \quad \frac{\partial \rho}{\partial y} = \sin\varphi\,, \quad \frac{\partial \rho}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{y}{x^2}\,\frac{1}{1+y^2/x^2} = -\frac{1}{\rho}\sin\varphi\,, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{1}{\rho}\cos\varphi\,, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0\,. \tag{3.57}$$

Wir benutzen nun, daß

$$\vec{A} = A_\varphi \hat{e}_\varphi = -A_\varphi \sin\varphi \, \hat{e}_x + A_\varphi \cos\varphi \, \hat{e}_y \qquad (3.51)$$

und daher

$$A_x = -\sin\varphi \, A_\varphi , \qquad A_y = \cos\varphi \, A_\varphi \qquad (3.52)$$

Damit berechnen wir $\vec{B}$. Wegen $\vec{A} \parallel \hat{e}_\varphi$ folgt sofort daß

$$B_\varphi = \hat{e}_\varphi \cdot \vec{B} = 0 \qquad (3.53)$$

da $\vec{\nabla} \times \vec{A}$ senkrecht auf $\vec{A}$ steht. Als nächstes berechnen wir $B_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}$. Es gilt

$$B_z = \frac{\partial \rho}{\partial x} \overset{(1)}{\frac{\partial A_y}{\partial \rho}} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \overset{(2)}{\frac{\partial A_y}{\partial \varphi}} - \frac{\partial \rho}{\partial y} \overset{(3)}{\frac{\partial A_x}{\partial \rho}} - \frac{\partial \varphi}{\partial y} \overset{(4)}{\frac{\partial A_x}{\partial \varphi}} \qquad (3.54)$$

siehe S. 56a. Mit Gl. folgt

$$B_z = \frac{\partial A_\varphi}{\partial \rho} \left(\overset{(1)}{\cos^2\varphi} + \overset{(3)}{\sin^2\varphi} \right) - \frac{1}{\rho} \left(\underset{(2)}{\sin\varphi \frac{\partial A_y}{\partial \varphi}} + \underset{(4)}{\cos\varphi \frac{\partial A_x}{\partial \varphi}} \right)$$

$$= \frac{\partial A_\varphi}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} A_\varphi = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho A_\varphi \right) \qquad (3.55)$$

Allgemein Koordin. trafo, siehe Übungen.

Mit der asymptotischen Form, Gl. (3.50), S. 55,

$$A_\varphi = \frac{\pi I R^2}{c} \frac{\rho}{\left((\rho+R)^2+z^2\right)^{3/2}}$$

ergibt sich für B_z,

$$\boxed{\begin{aligned} B_z &= \frac{\pi I R^2}{c} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{\rho^2}{\left((\rho+R)^2+z^2\right)^{3/2}} \\ &= \frac{\pi I R^2}{c} \frac{1}{\left[(\rho+R)^2+z^2\right]^{5/2}} \left(-\rho^2+\rho R+2R^2+2z^2\right) \end{aligned}} \qquad (3.58)$$

mit $k = \frac{4\rho R}{(\rho+R)^2+z^2} \ll 1$, siehe Gl. (3.45). Es bleibt die ρ-Komponente,

$$\begin{aligned} B_\rho = \hat{e}_\rho \cdot \vec{B} &= \cos\varphi \, B_x - \sin\varphi \, B_y \\ &= -\cos\varphi \frac{\partial A_y}{\partial z} - \sin\varphi \frac{\partial A_x}{\partial z} \\ &= -\frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \end{aligned} \qquad (3.59)$$

Es folgt

$$\boxed{B_\rho = \frac{\pi I R^2}{c} \frac{3 z \rho}{\left[(\rho+R)^2+z^2\right]^{5/2}}} \qquad (3.60)$$

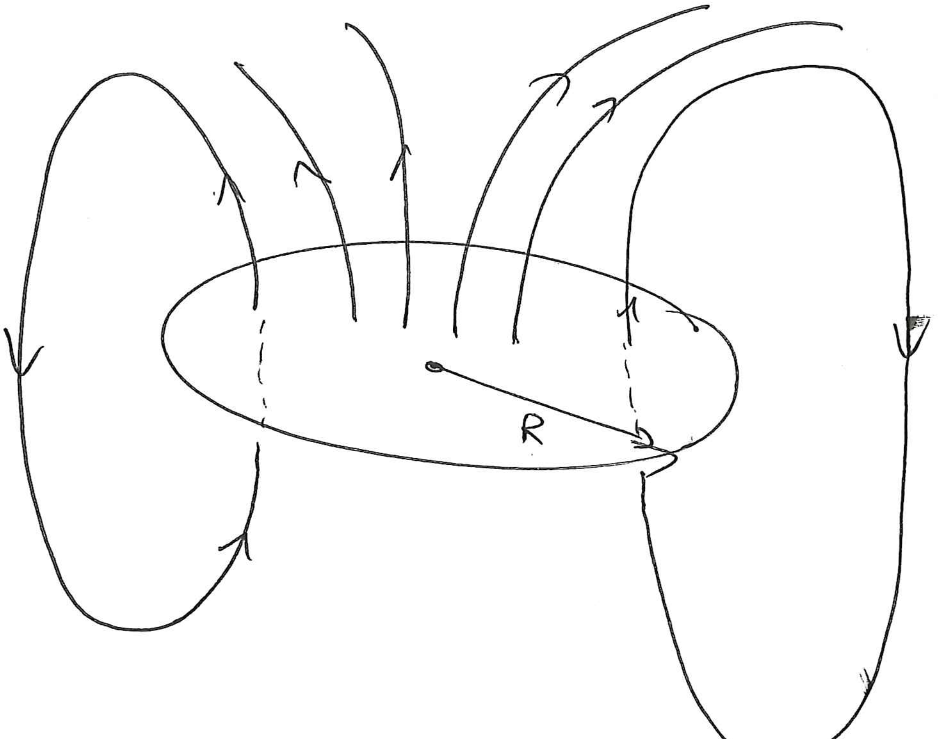
Wie beim elektrischen Feld einer Ladungsvert. möchten wir das magn. Feld für große Abstände von der Leiterschleife betrachten,

$$\rho^2 + z^2 \gg R^2 \qquad (3.61)$$

Dann gilt

$$B_\rho \simeq \frac{\pi I R^2}{c} \frac{3 z \rho}{\left[\rho^2 + z^2\right]^{5/2}}$$

$$B_\rho \simeq \frac{\pi I R^2}{c} \frac{2 z^2 - \rho^2}{\left[\rho^2 + z^2\right]^{5/2}} \qquad (3.62)$$



Aus der Ferne wie elektr. Dipolfeld!

Für die analoge Definition verwenden wir wieder die Multipolentwicklung, siehe S. 36 ff.
Wir entwickeln das Vektorpot. $\vec{A}$, Gl. (3.11) für eine lokale Stromverteilung, $\vec{j}(r'>R)=0$, und $r>R$,

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{c}\frac{1}{r}\overbrace{\int d^3r'\,\vec{j}(\vec{r}')\cancel{d^3r'}}^{0 \text{ keine Quellen}} + \frac{1}{c}\left(\frac{\vec{r}}{r^3}\cdot\int \vec{r}'\right)\vec{j}(\vec{r}')\,d^3r'$$

$\int d^3r'\,(\vec{j}\cdot\vec{\nabla}_{r'})\,\vec{r}' = 0$, $\vec{\nabla}\vec{j}=0$

$$+ \dots$$

$$= \frac{1}{c}\sum_i \frac{r_i}{r^3}\int d^3r'\; r'_i\,\vec{j}(\vec{r}')\,d^3r' + O(r^{-4})$$

$$= \frac{1}{2c}\sum_i \frac{r_i}{r^3}\int d^3r'\left(r'_i\,\vec{j} - \vec{r}'\,j_i\right)d^3r' + \dots$$

$\int d^3r'\; r'_i\,\vec{j}(\vec{r}') = \int d^3r'\; r'_i\,(\vec{j}\cdot\vec{\nabla})\,\vec{r}'$

$= -\int d^3r'\; j_i\,\vec{r}'$

$$= -\frac{\vec{r}}{r^3}\times\boxed{\frac{1}{2c}\int d^3r'\;\vec{r}'\times\vec{j}(\vec{r}')} + \dots \qquad (3.63)$$

mit dem magn. Dipolmoment

$$\boxed{\vec{m} = \frac{1}{2c}\int d^3r'\;\vec{r}'\times\vec{j}(\vec{r}')} \qquad (3.64)$$

und damit

$$\boxed{\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^3}} \qquad (3.65)$$

In unserem Fall, mit $\vec{j}$ aus Gl. (3.35), S. 51,

$$\vec{j} = I\,\delta(\rho - R)\,\delta(z)\,\hat{e}_\varphi$$

gilt

$$\vec{m} = \frac{I}{2c} \int \rho\, d\rho\, dz\, d\varphi \; \vec{r} \times \hat{e}_\varphi \,\delta(\rho - R)\,\delta(z)$$

$\vec{r} = \rho\hat{e}_\rho + z\hat{e}_z$

$$= \frac{I}{2c} \int d\varphi \; R^2 \underbrace{\hat{e}_{\rho=R} \times \hat{e}_\varphi}_{\hat{e}_z} \qquad (3.66)$$

$$= \pi R^2\, I/c \; \hat{e}_z \;\longleftarrow\; \hat{e}_z/c \;[\text{Stromstärke} \cdot \text{Fläche}]$$

und damit

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\pi R^2\, I/c}{r^3}\, \hat{e}_z \times (\rho\hat{e}_\rho \cancel{+ z\hat{e}_z})$$

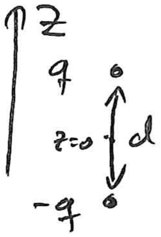
$$= \frac{\pi I R^2}{c} \frac{\rho}{r^3} \qquad (3.67)$$

siehe Gl. (3.50), S. 55.

Elektr. Dipol

$$\phi(\vec{r}) \simeq \frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^3}$$

mit $\vec{p} = \int d^3r'\, \rho(\vec{r}')\,\vec{r}'$



$$\vec{p} = q \cdot d \cdot \hat{e}_z$$

Übungsaufgabe

$\vec{E}$ - Feld

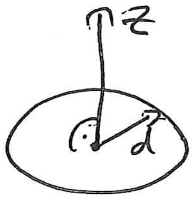
$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\cdot\phi$$

$$= \frac{3\,\hat{e}_r\; \vec{p}\cdot\hat{e}_r - \vec{p}}{r^3}$$

Magn. Dipol

$$\vec{A} \simeq \frac{\vec{m}\times\vec{r}}{r^3}$$

mit $\vec{m} = \frac{1}{2c}\int d^3r'\, \vec{r}' \times \vec{j}\,(\vec{r}')$



$$\vec{m} = \frac{\pi d^2 I}{c}\,\hat{e}_z$$

$\vec{B}$ - Feld

$$\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$$

$$= \frac{3\,\hat{e}_r\; \vec{m}\cdot\hat{e}_r - \vec{m}}{r^3}$$

$\boxed{\text{Dipol fields are form-equivalent}}$