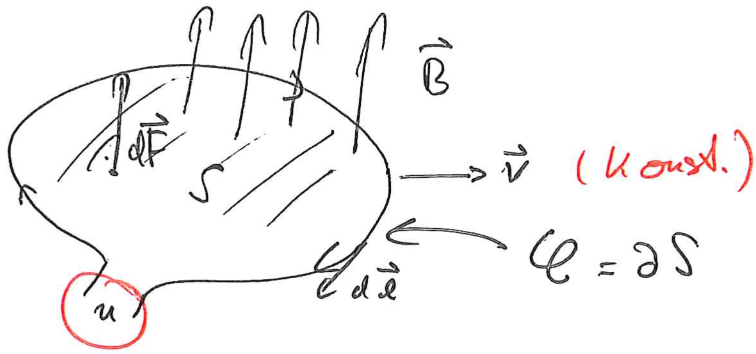
4 Maxwellsche Theorie

4.1 Faradaysches Induktionsgesetz

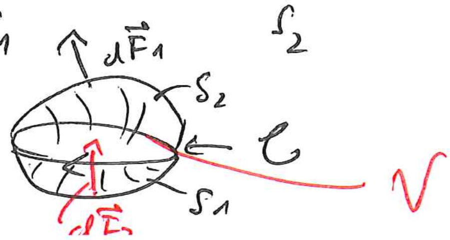


In einem ringförmigen Leiter wird ein Strom induziert, wenn sich der durch den Leiter (durch die Fläche S) durchtretende magnet. Fluß $\phi = \int_S \vec{B}\, d\vec{F}$ ändert:

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{E}\, d\vec{l} = -\underbrace{k}_{\text{prop. konst.}} \frac{d\phi}{dt} = -k \int_S \vec{B}\, d\vec{F} \qquad (4.1)$$

Die Wahl der von $\mathcal{C}$ berandeten Fläche S ist beliebig, da

$$\int_{S_1} \vec{B}\, d\vec{F} - \int_{S_2} \vec{B}\, d\vec{F} = \int_V \underbrace{\vec{\nabla}\vec{B}}_{0}\, dV = 0 \qquad (4.2)$$



Orientierung!
$\boxed{\mathcal{C} = \partial S_i}$

Bestimmung der Konstanten:

Nun berechnen wir die totale Zeitableitung

$\frac{d\phi}{dt}$ auf der rechten Seite von Gl. (4.2).

Das Magnetfeld hat im allgemeinen die Form

$\vec{B}(\vec{r}(t); t)$ und damit die Zeitableitung

$$\frac{d\vec{B}}{dt} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\, \vec{B} \qquad (4.3)$$

mit $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$. Mit Gl. (4.3) folgt

$$\begin{aligned} \frac{d\phi}{dt} &= \int_S d\vec{F} \cdot \left[\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \cdot \vec{B}\right] \\ &= \int_S d\vec{F}\, \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \int_{\mathcal{C}} d\vec{l}\, (\vec{B} \times \vec{v}) \end{aligned} \qquad (4.4)$$

mit

$$(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \cdot \vec{B} = \underset{\substack{\uparrow \\ \vec{v}\ \text{konst.}}}{\vec{\nabla} \times (\vec{B} \times \vec{v})} + \vec{v}\,\underbrace{(\vec{\nabla} \cdot \vec{B})}_{0} \qquad (4.5)$$

↑ kein magn. Monopole

Daraus folgt

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -k \int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - k \int_{\mathcal{C}} d\vec{l}\, (\vec{B} \times \vec{v}) \qquad (4.6)$$

für bel. Flächen S und Felder $\vec{E}, \vec{B}$.

Sei nun $\frac{\partial B}{\partial t} = 0$, d. h. wir ziehen die Leiterschleife durch ein gegebenes stat. $\vec{B}$-Feld. Dann ergibt sich

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{E}\, d\vec{l} = -k \int_{\mathcal{C}} d\vec{l}\,(\vec{B} \times \vec{v}) \tag{4.7}$$

Die elektrostat. Kraft auf eine Probeladung, $q \cdot \vec{E}$ wird erzeugt durch die Lorentzkraft

$$\vec{F}_L = q \cdot (\vec{v}/c \times \vec{B}) \tag{4.8}$$

die hinter dem Ampèreschen Kraftgesetz 'steckt'.

Wir folgern $k = 1/c$ und damit

$$\int_{\mathcal{C}} \left[\vec{E} - \frac{1}{c}(\vec{v} \times \vec{B})\right] d\vec{l} = -\frac{1}{c} \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\, d\vec{F} \tag{4.9}$$

oder, mit $\vec{E} \to \vec{E} - \frac{1}{c}(\vec{v} \times \vec{B})$ / Koord.-syst. mit $\vec{v} = 0$

$$\int_S \left[\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right] d\vec{F} = 0$$

und lokal

$$\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0} \tag{4.10}$$