4.2 Verschiebungsstrom & Maxwellsche Gleichungen

Mit dem Faradayschen Induktionsgesetz lesen sich unsere Grundgleichungen nun

$$
\begin{array}{llll}
(i) & \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 4\pi\rho & (iii) & \vec{\nabla}\times\vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \\
(ii) & \vec{\nabla}\times\vec{B} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} & (iv) & \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0
\end{array}
\qquad (4.11)
$$

Quellterme

inhomogen homogen

Mit $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ haben wir die stat. Näherung aufgehoben. Diese, in Form von $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ war allerdings auf Basis der inhomogenen magnetostat. Grundgleichung, (ii). Diese erfordert $\vec{\nabla}\vec{j} = 0$. Nun gilt allgemein die Kontinuitätsgl. (3.3), S. 41,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\vec{j} = 0 \qquad (4.12)$$

Damit ist klar, daß (ii) erweitert werden muß auf

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} - \frac{4\pi}{c}\vec{j} = \frac{4\pi}{c}\,\overset{\text{Verschiebungsstrom}}{\delta\vec{j}} \qquad (4.13)$$

mit

$$\vec{\nabla}\cdot\Big(\underbrace{\vec{\nabla}\times\vec{B}}_{0} - \frac{4\pi}{c}\vec{j}\Big) = \frac{4\pi}{c}\vec{\nabla}\,\delta\vec{j}$$

$$-\frac{4\pi}{c}\vec{\nabla}\vec{j} = \frac{4\pi}{c}\vec{\nabla}\,\delta\vec{j}$$

$$(3.3)/(4.12) \curvearrowright \quad \frac{\partial\rho}{\partial t} = \vec{\nabla}\,\delta\vec{j} \qquad (4.14)$$

Nun gilt mit Gl. (4.11), (i), daß

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = \frac{1}{4\pi}\vec{\nabla}\cdot\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \curvearrowright \boxed{\vec{\nabla}\Big(\delta\vec{j} - \frac{1}{4\pi}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\Big) = 0} \qquad (4.15)$$

und damit bis auf eine Rotation, $\delta\vec{j} = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$,

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} \qquad (4.16)$$

die dynamische inhomogene Grundgleichung (ii)'.

Es folgen die Maxwellschen Gleichungen

$$\boxed{\begin{array}{llll} (1) & \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 4\pi\rho & (3) & \vec{\nabla}\times\vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = 0 \\ (2) & \vec{\nabla}\times\vec{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} & (4) & \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \end{array}} \qquad (4.17)$$

inhomog. Maxwellgl. homogene Maxwellgl. (Existenz von pot.)

Gleichung (1) bedeutet weiterhin, daß der Fluß des elektr. Feldes aus einer Oberfläche ∂V durch die Gesamtlad. in dem Volumen V gegeben ist.

(4) bedeutet die Quellenfreiheit des magn. Feldes,

$$\boxed{\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}} \qquad (4.18)$$

(2) bedeutet, daß ein Strom durch die Rot des Magnetfeldes oder durch die zeitl. Änderung des $\vec{E}$-Feldes erzeugt wird.

(3) bedeutet, daß $\vec{E}$ aus ϕ und $\vec{A}$ erzeugt wird:

Sei

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi + \vec{X}$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{\nabla} \times \vec{X} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla} \times \vec{A} = -\frac{1}{c}\vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \qquad (4.19)$$

oder

$$\vec{\nabla} \times \left(\vec{X} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0$$

Wir folgern $\vec{X} = -1/c \, \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ und

$$\boxed{\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - 1/c \, \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}} \qquad (4.20)$$

Mit (4.18) und (4.20) sind die homogenen Maxwellgl. gelöst; sie sind Integrabilitätsbed.. In (4.20) und (4.17) (2),(3) sehen wir außerdem schon die inhärent 4-dim Struktur der Gleichungen.