4.3 Elektromagnetische Wellen

Wir betrachten zunächst die Maxwell gl. im Vakuum; $\rho = 0$, $\vec{j} = 0$:

$$
\begin{aligned}
&(1) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \qquad &&(3) \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \\
&(2) \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0 \qquad &&(4) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0
\end{aligned}
\tag{4.21}
$$

Diese Gleichungen sind völlig symmetrisch in $\vec{E}$ und $\vec{B}$. Eine gegebene Lösung für $\vec{E}$ und $\vec{B}$ ist auch eine für $\vec{B}$ und $\vec{E}$!

Wir eliminieren $\vec{E}$ aus (2) mit

$$
\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla} \times \vec{E} \underset{(3)}{=} -\Delta \vec{B} + \vec{\nabla}\underbrace{(\vec{\nabla} \cdot \vec{B})}_{(4) \to 0} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}
\tag{4.22}
$$

und daher

$$
\boxed{(a) \quad \Delta \vec{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0}
$$

und wg. der Symmetrie in (4.21) $[(\vec{E}, \vec{B}) \to (\vec{B}, -\vec{E})]$ (4.23)

$$
\boxed{(b) \quad \Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0}
$$

In der Anwesenheit von Quellen verändern sich die Wellengleichungen durch die Quellterme. Die Struktur der Gleichungen wird am besten durch die Potentiale $(\vec{A}, \phi)$ wiedergegeben:

Mit (4.18), (4.20) folgt aus (4.17), (2)

$$\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\vec{A}\right) - \Delta\vec{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\phi + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} \qquad (4.24)$$

und damit

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} - \Delta\vec{A} + \vec{\nabla}\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\phi + \vec{\nabla}\vec{A}\right) = \frac{4\pi}{c}\vec{j} \qquad (4.25a)$$

und aus (4.17), (1)

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - \Delta\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\phi + \vec{\nabla}\vec{A}\right) = 4\pi\rho \qquad (4.25b)$$

Bis auf die Terme $\sim \left(\frac{1}{c}\frac{\partial\phi}{\partial t} - \vec{\nabla}\vec{A}\right)$ erfüllen $\vec{A}$ und ϕ inhomogene Wellengleichungen mit den Quelltermen $4\pi/c\,\vec{j}$ und $-4\pi\rho$.

Nun wissen wir schon, daß in der Elektro- und Magnetostatik die Potentiale $\vec{A}$ und ϕ eine Eichfreiheit haben, siehe z.B. Kapitel 3.3, S. 48–49. Dort hatten wir die Coulombeichung benutzt, $\vec{\nabla}\vec{A} = 0$.

In der Wellengl. (4.25a) benutzen wir nun die Loren(t)zeichung

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \phi}{\partial t} + \vec{\nabla}\vec{A} = 0 \tag{4.26}$$

und damit

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \Delta \vec{A} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} \tag{4.27}$$

für (4.25a) und analog für (4.25b). Wir schreiben suggestiv

$$\boxed{\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right)\left(\vec{A}, \phi\right) = \frac{4\pi}{c}\left(\vec{j}, c\rho\right)} \tag{4.28}$$

Es bleibt zu zeigen, daß die Lorentzeichung (4.26) erzielt werden kann. Dazu verändern wir die Potentiale mit

$$\vec{A} \to \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\omega(t,\vec{r})$$
$$\phi \to \phi' = \phi - \frac{1}{c}\frac{\partial\omega(t,\vec{r})}{\partial t} \qquad (4.29)$$

Mit (4.29) gilt, daß

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \to -\vec{\nabla}\phi' - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}'}{\partial t}$$
$$= \vec{E} + \underbrace{\vec{\nabla}\frac{\partial\omega}{\partial t} - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\omega}_{0} \qquad (4.30)$$

und analog

$$\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A} \Rightarrow \vec{\nabla}\times\vec{A}' = \vec{\nabla}\times\vec{A} + \underbrace{\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\cdot\omega}_{0}$$

Die Lorentzeichung bedeutet dann

$$\frac{1}{c}\frac{\partial\phi}{\partial t} + \vec{\nabla}\vec{A} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\omega}{\partial t^2} - \Delta\omega \qquad (4.31)$$

$$= -(-)\underbrace{\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t^2} - \Delta\right)}_{\Box = -\frac{\partial^2}{(\partial ct)^2} + \Delta}\omega$$

Wir nehmen nun an, daß $\Box$ invertierbar ist (Seite 72a), wie Δ, und damit hat Gl. (4.31) eine Lösung.

Wir definieren die Greensche Fkt. von $\Box$

durch

$$\boxed{\Box_x\, G(ct,\vec{r};ct',\vec{r}\,') = -4\pi\,\delta(\vec{r}-\vec{r}\,')\,\delta(t-t')} \tag{4.32}$$

Eine spezielle Lösung der Gl. (4.32) ist

$$G_{ret.}(ct,\vec{r};ct',\vec{r}\,') = \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,\delta\left(t'-\left[t-\frac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{c}\right]\right) \tag{4.33}$$

die retardierte Greensche Funktion (Beweis durch einsetzen).

Damit ergibt sich ω als

$$\omega(t,\vec{r}) = \frac{1}{4\pi}\int dt'\,d^3r'\,G(ct,\vec{r};ct',\vec{r}\,')\left[\frac{1}{c}\frac{\partial\phi}{\partial t'}+\vec{\nabla}'\vec{A}\right](ct',\vec{r}\,') \tag{4.34}$$

mit

$$-\Box\omega = \frac{1}{c}\frac{\partial\phi}{\partial t}+\vec{\nabla}\vec{A}$$

Wir möchten nun explizit sehen, daß es sich bei den Lösungen der Wellengleichungen (4.23), S. 69 um ebene Wellen handelt. Gleichzeitig muss eine Lösung von (4.23) auch alle Maxwellgl. (4.21) lösen.

Zuerst schauen wir auf

$$\Delta f(t,\vec{r}) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f(t,\vec{r})}{\partial t^2} = 0 \qquad (4.35)$$

Zur Lösung von (4.35) betrachten wir zunächst eine Funktion $f(t,x)$

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f(t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \qquad (4.36)$$

da $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial z} = 0$. Die reduzierte Gleichung (4.36) hat die spezielle Lösung

$$f(t,x) = e^{ik(ct-x)} \qquad (4.37)$$

mit

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = -k^2 f \,, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -k^2 f \qquad (4.38)$$

Ausbreitungsgeschwindigkeit:

Sei $f(t,x) = \cos k(ct-x)$ reell

Wir setzen uns auf einen Wellenberg

$\cos k(ct-x) = 1$ und verfolgen seine Position.

Es gilt für alle Wellenberge

$$ct - x = 0 \mod 2\pi/k$$

und damit für den Wellenberg im Ursprung

bei $t=0$:

$$\boxed{x = ct}$$

Die Welle breitet sich mit Lichtgeschwindigkeit

aus.

Die Lösung (4.37) ist eine ebene Welle mit Frequenz kc und Wellenvektor $(k, 0, 0)$. Außerdem lösen sowohl $\mathrm{Re}\, f = \cos k(ct-x)$ als auch $\mathrm{Im}\, f = \sin k(ct-x)$ (4.36). Eine allgemeine Lösung $f(t,x)$ ist

$$f(t,x) = \int \frac{dk}{(2\pi)} \tilde{f}(k)\, e^{ik(ct-x)}, \qquad (4.39)$$

eine Superposition aller ebenen Wellen in x-Richtung.

Bemerkung: $f(t,x) = e^{k(ct-x)}$ ist keine legitime Lösung

Die Lösung (4.36) lässt sich zu einer allgemeinen Lösung von (4.35) erweitern, indem wir

$$f_{\vec{k}}(t,\vec{x}) = e^{i\omega t - \vec{k}\vec{x}}, \quad \omega = c\sqrt{\vec{k}^2} \qquad (4.40)$$

in Analogie zu (4.37) definieren. Es gilt

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = -\vec{k}^2 f = -\Delta f \qquad (4.41)$$

Die allgemeine Superposition ist dann

$$f(t,\vec{x}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \tilde{f}(\vec{k})\, e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{x})} \qquad (4.42)$$

mit

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) f(t,\vec{r})$$

$$= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\, \tilde{f}(\vec{k}) \left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})} \qquad (4.43)$$

$$= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\, \tilde{f}(\vec{k}) \left(-\vec{k}^2 + \vec{k}^2\right) e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})} = 0$$

Damit lösen $f(t,\vec{r})$, $f_{\vec{k}}(t,\vec{x})$ die Wellengleichung (4.35). Löst $\vec{B} = \vec{B}_0 \cdot f_{\vec{k}}$ und $\vec{E} = \vec{E}_0 \cdot f_{\vec{k}}$ mit konst. $\vec{E}_0$, $\vec{B}_0$ auch die Maxwellgl. (4.21)? Dazu betrachten wir

$$\vec{\nabla}\vec{B} = \vec{B}_0 \cdot \vec{\nabla} f_{\vec{k}} = -i(\vec{B}_0 \cdot \vec{k})\, f_{\vec{k}}(t,\vec{r}). \qquad (4.44)$$

Es folgt

$$\boxed{\vec{B}_0 \cdot \vec{k} = 0}, \qquad (4.45a)$$

d.h., $\vec{B}_0(\vec{k})$ ist orthogonal zum Wellenvektor $\vec{k}$, die Welle ist <u>transversal</u>: Das magnetische Feld steht senkrecht zur Ausbreitungsrichtung.

Analog erhalten wir $\vec{E}_0 \cdot \vec{k} = 0$ (4.45b)

Außerdem gilt, $\vec{B} = B_0(\vec{k})\, f_{\vec{k}}'(t,\vec{x})$, $\vec{E} = \vec{E}_0(\vec{k}')\, f_{\vec{k}'}(t,\vec{x})$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -i\left[\vec{k} \times \vec{B}_0 \cdot f_{\vec{k}}(t,\vec{x}) + \omega(\vec{k}')\, \vec{E}_0 \cdot f_{\vec{k}'}(t,\vec{x})\right] = 0$$

Es folgt sofort $\boxed{|\vec{k}| = |\vec{k}'|}$ und damit (4.46)

$$\vec{k} \times \vec{B}_0 + |\vec{k}|\, \vec{E}_0 = 0\,, \qquad (4.47)$$

$$(\vec{k} \times \vec{E}_0 - |\vec{k}|\, \vec{B}_0 = 0)$$

d.h., $\vec{E}$ und $\vec{B}$ - Felder einer elektromagnet. Welle stehen senkrecht aufeinander und auf der Ausbreitungsrichtung.

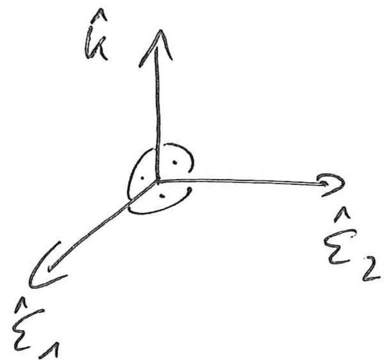
Es gibt zwei Polarisationen $\hat{\varepsilon}_1(\vec{k})$, $\hat{\varepsilon}_2(\vec{k})$ mit

$$\hat{\varepsilon}_1 \cdot \vec{k} = \hat{\varepsilon}_2 \cdot \vec{k} = 0\,, \quad \hat{\varepsilon}_1^2 = \hat{\varepsilon}_2^2 = 1 \qquad (4.48)$$
$$\hat{\varepsilon}_1 \cdot \hat{\varepsilon}_2 = 0$$

und daher,

$$\vec{E} = \hat{\varepsilon}_i \cdot f_k(t,\vec{x}) \sim \vec{B} = (\hat{k} \times \hat{\varepsilon}_i)\, f_k(t,\vec{x}) \qquad (4.49)$$

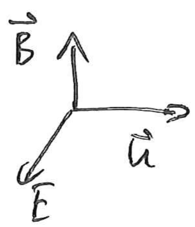
$$\hat{k} = \vec{k}/|\vec{k}|$$



z.B.: $\hat{\varepsilon}_2 \times \hat{k} = \hat{\varepsilon}_1$

$\hat{\varepsilon}_1 \times \hat{k} = -\hat{\varepsilon}_2$

$\hat{\varepsilon}_1 \times \hat{\varepsilon}_2 = \hat{k}$



Damit können wir eine allgemeine Lösung der homogenen Maxwellgleichungen (4.21) angeben:

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{E}(t,\vec{x}) &= \sum_{i=1,2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\, \tilde{f}_i(\vec{k})\, \hat{\varepsilon}_i(\vec{k})\, e^{i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{x})} \\ \vec{B}(t,\vec{x}) &= \sum_{i=1,2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\, \tilde{f}_i(\vec{k})\, \hat{k}\times\varepsilon_i(\vec{k})\, e^{i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{x})} \\ \text{mit} \quad \omega &= c\sqrt{\vec{k}^2} \end{aligned}} \qquad (4.50)$$

Bevor wir diese Lösungen und solche der vollen Maxwellgleichungen mit Quelltermen besprechen, konzentrieren wir uns noch auf die Raumzeitsymmetrien der Maxwellgleichungen (und deren Lösungen